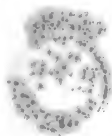
ABREGÉ
DES
ÉLÉMENS
DE
MATHEMATIQUES.

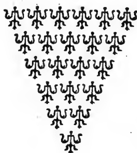


ABREGÉ DES ÉLÉMENS DE MATHEMATIQUES.

Par M. RIVARD, Professeur de Philosophie en l'Université de Paris.

PREMIERE PARTIE.

Arithmétique, Algebre, Raisons, Proportions, Fractions & Equations.







A SOLEURE,
Chez DANIEL SCHERER, Imprimeur & Libraire,

M. DCC. XLIV.



A MONSEIGNEUR LE RECTEUR ET A L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

MONSEIGNEUR,

C'est dans l'Université dont vous êtes le Chef, que j'ai puisé quelques connoissances des Mathématiques. A qui puis-je mieux offrir les Elémens que j'en ai recueillis, qu'à cette Mere commune des Sciences, de qui je tiens le peu que j'en ai? C'est un tribut que je lui dois, ou plutôt c'est le juste hommage d'un bien qui lui appartient tout entier: car je reconnois sans peine, que mon Livre ne contient que les principes répandus dans les cayers de quelques Professeurs de Philosophie, auxquels j'ai tâché de donner l'ordre & l'étendue que demande l'impression.

Témoin des peines & des dégouts que causent aux jeunes gens qui étudient la Philosophie, des cayers écrits peu correctement sur des matieres embarrassantes, j'ai crû que ce seroit leur rendre service que de leur donner imprimé en un seul volume, tout ce que le tems leur permet d'ap-

prendre de Mathématiques pendant leurs cours. Rien ne peut être plus efficace pour les porter à le lire & à en profiter, que de le voir paroître sous le nom & les auspices d'une Compagnie célébre, qui depuis plusieurs siécles est en possession de réunir dans son sein toutes les Sciences, & qui passe, à juste titre, pour la premiere Ecole de l'Univers.

Si ce fut autrefois un grand bonheur pour moi de recevoir de ses leçons, c'est aujourd'hui un honneur dont je connois tout le prix, qu'Elle veuille bien me permettre de lui en présenter les fruits. Trouvez bon, MONSEIGNEUR, que je vous supplie d'être le dépositaire & le Garant de la reconnoissance & du profond respect avec lequel je serai toute ma vie,

MONSEIGNEUR,

Son très-humble, très-fidéle,
& très-dévoué serviteur,
RIVARD.



PRE'FACE.

L'ESTIME que l'on fait généralement des Mathématiques, a introduit depuis quelques années dans l'Université de Paris l'usage d'en expliquer les Elémens dans la plûpart des Classes de Philosophie. Les Professeurs les mieux instruits de cette Science & de ses avantages, ont reconnu sans peine que cette partie de la Philosophie ne méritoit pas moins leur attention que la Logique & la Physique : ils ont vû que les Mathématiques étoient une véritable Logique-pratique, qui ne consiste pas à donner une connoissance seche des regles qui conduisent à la vérité, mais qui les fait observer sans cesse, & qui, à force d'exercer l'esprit à former des jugemens & des raisonnemens certains, clairs & méthodiques, l'habitue à une grande justesse.

En effet, rien n'est plus propre que l'étude de cette Science, pour fixer l'attention des jeunes Etudians, pour leur donner de l'étendue d'esprit, pour leur faire goûter la vérité, pour mettre de l'ordre & de la netteté dans leurs pensées, ce qui est le but de la Logique. S'il y avoit encore quelqu'un qui n'en fût pas persuadé, il pourroit s'en convaincre par ces courtes réflexions. Les signes que les Mathématiques emploient, les lignes sur-tout, & les figures dont se sert la Géométrie, arrêtent la légereté de l'imagination en frappant les yeux; elles tracent dans l'esprit les idées des choses qu'il veut appercevoir; elles surprennent & attachent ainsi son attention; souvent la preuve d'une proposition dépend de quantité de principes : l'esprit n'est-il pas alors obligé d'étendre, pour ainsi dire, sa vûe avec effort, afin de les envisager tous en même tems?

La vérité eſt difficile à découvrir dans ces Sciences ; mais auſſi elle ſemble vouloir dédommager ceux qui la cherchent, de leurs peines par l'éclat d'une vive lumiere dont elle charme leur entendement, & par un plaiſir pur & ſans mélange dont elle pénétre l'ame. A force de la voir & de l'aimer, on ſe familiariſe avec elle, & on s'accoutume à remarquer ſi bien les traits lumineux qui l'annoncent & la caractériſent toûjours, qu'on eſt bien-tôt capable de la reconnoître ſous quelque forme qu'elle paroiſſe, & de diſtinguer en toute matiere ce qui ne porte pas ſon empreinte.

Enfin perſonne n'ignore que la Méthode des Mathématiciens tend plus que toute autre, à rendre l'eſprit net & précis, & à le diriger dans la recherche de la vérité ſur quelque ſujet que l'on puiſſe travailler. Les Mathématiciens, pour fondement de leurs connoiſſances, ne poſent que des principes ſimples & faciles, mais certains, lumineux, féconds. Enſuite ils tirent de ces points fondamentaux les concluſions les plus aiſées & les plus immédiates, qui n'ayant rien perdu de l'évidence de leurs principes, la communiquent à d'autres concluſions, celles-ci à de plus éloignées, & ainſi de ſuite. Par-là il ſe forme une longue chaîne de véritez, laquelle étant attachée par un bout à une baſe inébranlable, s'étend de l'autre côté dans les matieres les plus difficiles.

Peut-on diſconvenir, qu'une application de quelques mois, donnée à la pratique d'une telle méthode, ne ſerve infiniment plus que certaines queſtions que l'on avoit coûtume de traiter ſans aucun fruit, à former le jugement, & à l'accoûtumer à faire uſage des regles de la Logique dans toutes les autres parties de la Philoſophie, dont les routes ſe trouvent même par-là fort applanies ? Qui pourroit ne pas approuver les Maîtres de Philoſophie qui ont banni à perpetuité de leurs Leçons des matieres vaines & étrangeres, pour

y en faire entrer d'autres si utiles, & qui y ont un droit naturel & inaliénable ?

Une seconde considération aussi très-importante engage encore les Professeurs à faire voir les Elémens des Mathématiques, sur-tout ceux de Géométrie; c'est qu'ils sont très-utiles, pour ne pas dire nécessaires, à l'intelligence des matieres de Physique. Cette raison fait même qu'on ne les explique pour l'ordinaire qu'immédiatement avant la Physique.

La Méchanique, qui est le fondement de la vraie Physique, fait un usage continuel des principes des Mathématiques : quand je dis la Méchanique, je n'entends pas seulement cet art qui enseigne à lever des fardeaux très-pesans par le moyen d'une puissance peu considérable : je comprends sous ce nom la Science entiere du mouvement, qui apprend à en mesurer la quantité, qui en découvre les propriétés, qui en détermine les loix : la Méchanique prise en ce sens, n'est-elle pas la base & le fondement de la Physique, dont le but est d'expliquer les effets de la nature : effets qui sont toûjours produits par quelques mouvemens ? Or il n'y a personne qui ose nier que les Mathématiques ne soient nécessaires pour traiter cette Science avec quelque exactitude. Elles ne le sont pas moins pour approfondir un peu l'Astronomie, qui est encore une partie de la Physique telle qu'on a coûtume de la donner dans les Ecoles, & qui est même la plus curieuse & celle dont la connoîssance nous procure plus de plaisir & de satisfaction : qu'y a-t-il en effet dans les sciences naturelles de plus capable de piquer notre curiosité que de connoître les causes de ces phénomenes remarquables qui sont exposez aux yeux de tous les hommes, tels que sont les éclipses de Soleil & de Lune, la diversité des Saisons, l'inégalité des jours dans les différens Pays, le mouvement des Astres : c'est l'Astronomie qui nous déve-

loppe les raiſons de toutes ces apparences merveilleuſes par les principes des Mathématiques, & ſur-tout de la Géométrie.

Ajoûtons que les bons Livres qui traitent de la Phyſique, ſuppoſent au moins les Elémens de Géométrie: enſorte que ceux qui les ignorent ſont obligez ou de renoncer à la lecture des meilleurs Livres de Phyſique, ou de paſſer les endroits les plus curieux & les plus intéreſſants.

Mais il n'eſt pas beſoin de m'étendre davantage pour prouver une vérité dont il n'y a perſonne aujourd'hui qui ne tombe d'accord: on ſent aſſez que rien n'eſt mieux dans les claſſes que de cultiver les Mathématiques, tant pour procurer à l'eſprit l'habitude de juger ſolidement, que pour préparer à la Phyſique. J'avois oüi dire pluſieurs fois à quelques Profeſſeurs habiles qu'il ſeroit à ſouhaiter que l'on eût dans un même volume un Abregé d'Arithmétique & d'Algébre avec des Elémens de Géométrie, le tout proportionné aux beſoins des Etudians en Philoſophie; que par-là on éviteroit deux grands inconveniens qui ſe rencontrent à dicter des cayers de Mathématiques, la perte du tems, c'eſt-à-dire, près de deux heures par jour employées à écrire des choſes qu'on n'entend point; & les fautes qui ſe gliſſent ſi aiſément dans cette matiére; où un chiffre, une lettre, un trait de plume mis pour un autre, déroutent un Commençant dans les choſes les plus faciles, le déſolent & l'arrêtent quelquefois pendant long-tems, ſans pouvoir paſſer outre.

Ces conſidérations ſur l'avantage que les jeunes Gens pourroient retirer d'un Ouvrage fait dans ce goût, me déterminerent à compoſer quelques cayers ſur cette matiére. Quand ils ont été achevez, je les ai fait voir à pluſieurs perſonnes qui m'ont aidé de leurs conſeils, & qui m'ont enfin engagé à les faire imprimer.

On trouvera à la fin de la Géométrie un Traité de Tri-

gonométrie rectiligne, que j'ai ajoûté pour faire voir l'utilité de la Géométrie dans la pratique, & pour montrer aux Etudians en Physique la maniere dont on mesure la distance des planettes. Je ne doute pas que malgré mes soins il ne se trouve plusieurs défauts répandus dans tout cet Ouvrage. Mais si le fond n'est pas désapprouvé, & qu'on le croie bon pour l'usage auquel je le destine, je m'estimerai heureux d'avoir contribué en quelque chose à l'instruction des jeunes Gens.



AVERTISSEMENT de l'Auteur.

LE tems qu'on peut employer aux Mathématiques pures dans les classes de Philosophie se réduisant à trois ou quatre mois, Mrs. les Professeurs qui veulent bien se servir de nos Elémens *in-quarto* pour les expliquer à leurs écoliers, sont obligez de passer plusieurs propositions qui se trouvent mêlées avec d'autres plus nécessaires pour la Physique. Il arrive donc par là que les jeunes étudians de Philosophie sont obligez d'acheter un Livre qui contient plusieurs choses qui leur deviennent inutiles, faute de les apprendre, & qui par cette raison coute plus cher. Pour éviter cet inconvenient je me suis déterminé à donner cet Abregé qui contient tout ce qui est nécessaire aux Physiciens dans l'Arithmétique, l'Algebre & la Géométrie. Je l'ai fait en copiant mot pour mot les principales propositions de la 3e. édition que l'on trouve chez Desaint & Saillant rue S. Jean de Beauvais, laquelle est plus correcte & plus ample que les précedentes. J'ai cru qu'il étoit à propos de cotter les articles de cet Abregé des mêmes *numéros* que ceux qui distinguent ces articles dans la troisiéme edition, afin que

les citations fussent les mêmes de part & d'autre. Par là il n'y aura aucun inconvénient que dans une même classe où l'on expliquera nos Elémens, les uns aient l'ouvrage entier tandis que les autres n'auront que l'Abregé. D'ailleurs j'ai souhaité que l'on pût se servir de cet Abregé pour trouver les propositions de Mathématiques qui seront citées dans un traité de la Sphere & des Cadrans que je suis sur le point de faire imprimer, & dans un Abregé des Sections Coniques, dans lesquels les articles de Géométrie qui seront citez, le seront conformément à la troisiéme édition. Au reste pour conserver les mêmes citations j'ai été obligé d'interrompre plusieurs fois la suite des numeros : par exemple, j'ai passé tout d'un coup de l'article 43 à celui qui est cotté 49 dans le second livre de la premiere partie, parce que j'ai omis les articles intermediaires ; mais je n'ai point été arrêté par cette considération qui ne m'a paru d'aucun poids.

APPROBATION.

J'Ai lû par l'ordre de Monseigneur le Garde des Sceaux un Manuscrit intitulé : *Elemens de Géométrie, avec un Abregé d'Arithmetique & d'Algebre* ; j'ai crû que l'ordre & la clarté qui regnent en cet Ouvrage, en rendroient l'impression utile au Public. Fait à Paris le 3. de May 1732.

SAURIN.

CONCLUSION DU TRIBUNAL DE L'UNIVERSITE',

Extractum è Commentariis Universitatis Parisiensis.

ANNO Domini millesimo septingentesimo trigesimo secundo, die secundo mensis Augusti, habita sunt apud Amplissimum Rectorem in Collegio Sorbonæ-Plessæo Comitia ordinaria Deputatorum Universitatis ...... accessit Magister *Rivard*, è Constantissimâ Natione vir Procuratorius, petiitque sibi liceret Universitati dedicare Librum à se scriptum, *de Matheseos Elementis*. Illo è Comitio de more egresso, dixit Amplissimus Rector cum secum jam de illo Libro prædictus Magister *Rivard* privatim egisset, se ante omnia postulasse ut opus illud suum viris aliquot Academicis in Mathesi versatis legendum traderet, ut ex eorum judicio haberet Uni-

versitas quod sequeretur : post paucos dies venisse ad se celeberrimos Philosophiæ Professores Magistros *Le Monnier*, *Guillaume & Grandin*, ac de prædicti Magistri *Rivard* opere luculenta dedisse testimonia. His ab amplissimo Rectore dictis, audito Edmundo *Pourchot*, Syndico, omnes censuerunt accipiendam esse, quam offerret Magister *Rivard* Libri sui Dedicationem. Atque ita ab Amplissimo Rectore conclusum fuit.

INGOÛT, Vice-Scriba.

AUTRE APPROBATION.

J'AI lû par ordre de Monseigneur le Chancelier, un Livre intitulé, *Elémens de Géométrie, avec un Abregé d'Arithmétique & d'Algebre*. J'ai crû que l'ordre & la clarté qui regnent en cet Ouvrage en rendroient une seconde Edition utile & nécessaire au Public. Fait à Paris ce 8. May 1737.

Signé, PITOT.

AUTRE APPROBATION.

J'AI lû par ordre de Monseigneur le Chancelier, le Livre de Mr. ..... Rivard des *Elémens de Géométrie*, *d'Arithmétique & d'Algebre*. Cet Ouvrage qui a mérité l'approbation & l'empressement du Public par l'ordre & la clarté, devient encore plus utile par les Additions nouvelles qu'on trouvera dans cette troisiéme Edition. Fait à Paris ce 25. Février 1739.

Signé, PITOT.



TABLE DE L'ARITHMETIQUE ET DE L'ALGEBRE.

LIVRE PREMIER.

LIVRE SECOND.

LIVRE TROISIÉME.

DES EQUATIONS.

FIN.



ABREGÉ DES ELEMENS DE MATHEMATIQUES.

DE'FINITIONS.

I. ON appelle *Mathématiques* toutes les Sciences qui traitent des grandeurs pour en découvrir l'égalité ou l'inégalité.

II. On entend par *grandeur* tout ce qui peut être augmenté ou diminué : ainſi les lignes, les nombres, les mouvemens, les viteſſes, &c. ſont des grandeurs, parce qu'elles ſont capables d'augmentation & de diminution. Toutes ces choſes ſont auſſi appellées *quantitez* ; enſorte que ces deux termes, *grandeur* & *quantité*, ont la même ſignification dans les Mathématiques, & peuvent être pris l'un pour l'autre.

Les Mathématiques ſont partagées en deux claſſes ; ſçavoir, les *Mathématiques pures* & les *mixtes.*

III. Les Mathématiques pures, ſont celles qui conſiderent les grandeurs en général, indépendamment des qualitez ſenſibles que ces grandeurs peuvent avoir, telles que ſont la dureté, la fluidité, la peſanteur, la lumiere, la couleur, &c.

IV. Les Mathématiques mixtes, ſont celles qui conſiderent les différentes eſpeces de grandeurs avec les qualitez ſenſibles qui les accompagnent : par exemple, la Méchanique, l'Aſtronomie, l'Optique, la Dioptrique, la Catoptrique ſont des Mathématiques mixtes.

Nous ne parlerons dans cet Ouvrage que des Mathématiques pures : elles ſe diviſent en *Algebre*, *Arithmétique* & *Géométrie*.

V. L'Algebre traite des grandeurs en général exprimées par des lettres de l'alphabet.

VI. L'Arithmétique traite des mêmes grandeurs exprimées par des chiffres.

VII. La Géométrie conſidere auſſi les mêmes grandeurs exprimées par des lignes & par des figures.

Les principes que les Mathématiciens employent dans leurs raiſonnemens, ſont ou des *définitions*, ou des *axiomes*, ou des *demandes*.

VIII. Les définitions ſont les explications des termes dont on ſe ſert, & dont on fixe le ſens pour éviter l'ambiguité & la confuſion : telle eſt la définition ſuivante du terme d'*axiome*.

IX. Les axiomes ſont des propoſitions qui ſervent à en démontrer pluſieurs autres, & qui ſont ſi évidentes, qu'elles n'ont pas beſoin de preuves : telles ſont les propoſitions ſuivantes : Le tout eſt plus grand qu'une de ſes parties : Deux grandeurs qui ſont chacune égales à une troiſiéme, ſont égales entr'elles.

X. Les demandes ſont des ſuppoſitions qui ſont évidemment poſſibles, ou des choſes ſi faciles à faire, que perſonne ne les conteſte ; comme ſi on demande que *a* ſignifie une grandeur, & *b* une autre ; qu'il ſoit permis d'ajouter un nombre à un autre, &c.

C'eſt par le moyen de ces ſeuls principes que les Mathématiciens démontrent toutes leurs propoſitions, qui ſont de quatre ſortes, *Théorêmes*, *Problêmes*, *Corollaires* & *Lemmes*.

XI. Un Théorême eſt une propoſition de laquelle il faut ſeulement démontrer la vérité.

XII. Un Problême eſt une propoſition dans laquelle il s'agit de faire quelque choſe, & de démontrer que la maniere qu'on propoſe pour l'exécution eſt infaillible.

XIII. Un Corollaire eſt une vérité qui ſuit d'une propoſition précédente.

XIV. Un Lemme eſt une propoſition que l'on ne prouve que pour démontrer d'autres propoſitions.

Outre ces quatre ſortes de propoſitions, on fait encore des remarques, ſoit pour les éclaircir, ſoit pour en faire connoître l'uſage, ſoit pour préparer à leur démonſtration. On employe auſſi des *ſcholies* pour l'éclairciſſement de quelques propoſitions, & pour en expliquer l'uſage.

Nous allons expoſer quelques-uns des axiomes ſur leſquels ſont fondées les Mathématiques.

Le tout eſt égal à toutes ſes parties priſes enſemble: par exemple, ſi on partage une toiſe en quatre parties, il eſt évident que la toiſe eſt égale à ces quatre parties.

Le tout eſt plus grand qu'une de ſes parties.

Deux grandeurs, qui ſont chacune égales à une troiſiéme, ſont égales entr'elles: & ſi deux grandeurs ſont égales entr'elles, & que l'une ſoit égale à une troiſiéme, l'autre ſera pareillement égale à cette troiſiéme.

Si à des grandeurs égales on ajoute d'autres grandeurs égales, les tous qui en réſulteront ſeront égaux.

Si à des grandeurs inégales on ajoute des grandeurs égales, les tous ſeront inégaux: pareillement ſi à des grandeurs égales on ajoute des grandeurs inégales, les tous ſeront inégaux.

Si de grandeurs égales on retranche des grandeurs égales, les reſtes ſeront égaux.

Si de grandeurs inégales on retranche des grandeurs

égales, les reſtes ſeront inégaux : pareillement ſi de grandeurs égales on retranche des grandeurs inégales, les reſtes ſeront inégaux.

Si de pluſieurs quantitez la premiere eſt plus grande que la ſeconde, la ſeconde plus grande que la troiſiéme, la troiſiéme que la quatriéme, & ainſi de ſuite, la premiere ſera plus grande que la derniere.

Nous diviſerons cet Ouvrage en deux parties, dont la premiere contiendra un abrégé d'Arithmétique & d'Algebre, que nous joignons enſemble, parce que l'on fait les mêmes opérations dans l'une & l'autre ſcience : la ſeconde partie ſera la Géométrie.



PREMIERE PARTIE.

ABREGE' D'ARITHMETIQUE & d'Algebre.

CETTE premiere partie renfermera trois Livres : dans le premier, on expliquera les ſix principales opérations, tant ſur les nombres que ſur les lettres : ſçavoir, l'addition, la ſouſtraction, la multiplication, la diviſion, la formation des puiſſances, & l'extraction des racines : dans le ſecond Livre, on expliquera & on démontrera d'abord les raiſons & les proportions, & enſuite les fractions : dans le troiſiéme, on traitera des équations.



LIVRE PREMIER.

Des principales opérations de l'Arithmétique & de l'Algebre.

DANS ce premier Livre nous parlerons des opérations de l'Arithmétique avant que de traiter de celles de l'Algebre, parce que les premieres paroissent moins difficiles, & qu'elles peuvent beaucoup contribuer à l'intelligence des autres.

DE L'ARITHMETIQUE.

ARTICLE PREMIER.

L'ARITHMETIQUE est une science qui enseigne à faire differentes opérations sur les nombres, & qui en démontre les principales propriétez.

2. On sçait que plusieurs unitez font un nombre : ainsi trois, cinquante-huit, sept cent quarante-six, &c. sont des nombres.

3. Pour marquer les nombres on se sert de plusieurs caracteres qui nous viennent des Arabes ; on les nomme ordinairement *chiffres* : il y en a dix, sçavoir, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, ce dernier ne signifie rien quand il est seul ; mais lorsqu'il est avec d'autres chiffres, il sert à augmenter la valeur de ceux après lesquels il se trouve : par exemple, le 5 seul ne vaut que cinq, mais s'il est suivi de 0. en cette maniere 50, il vaut cinquante. On peut avec ces dix caracteres exprimer tous les nombres possibles : afin de concevoir comment cela se peut, il faut faire attention aux remarques suivantes.

REMARQUE PREMIERE ET FONDAMENTALE.

4. On eſt convenu que chaque chiffre auroit des valeurs différentes, ſuivant le rang qu'il occupe dans un nombre; enſorte que les chiffres augmentent en proportion decuple en allant de droite à gauche, ou ce qui revient au même, les chiffres diminuent en proportion decuple en avançant de gauche à droite : c'eſt-à-dire, qu'une unité d'un chiffre vaut dix unitez de celui qui eſt immédiatement plus à droite : par exemple, dans le nombre ſept mille cinq cens ſoixante & deux, qui ſe marque en cette maniere, 7562, chaque unité du 7 vaut dix unitez du 5 : car les unitez du 7 ſont des mille, puiſque ce 7 marque ſept mille, & les unitez du 5. ſont des centaines : or un mille vaut dix centaines. Pareillement chaque unité du 5 vaut dix unitez du 6, parce que les unitez du 5 ſont des centaines, & les unitez du 6. ſont des dixaines. Enfin chaque unité du 6. vaut dix unitez du 2, puiſque les unitez du 6. ſont des dixaines, & les unitez du 2 ſont des unitez ſimples. Cette remarque eſt d'une ſi grande importance, qu'elle eſt le fondement des opérations de l'Arithmétique.

II.

5. On diviſe les chiffres qui compoſent un nombre en tranches, qui contiennent chacune trois caracteres, excepté la premiere à gauche, qui peut n'en contenir que deux, ou même un ſeul : c'eſt en allant de droite à gauche que l'on partage le nombre en tranches, leſquelles marquent différentes parties des nombres ; voici l'ordre de ces tranches en commençant vers la droite : celle des unitez, celle des mille, celle des millions, celle des milliards, celles des billiards, celle des trilliards, celle des quatrilliards, &c. Dans chaque tranche on diſtingue trois rangs ; le premier, qui eſt le plus à gauche, eſt celui des centaines ; le ſecond,

celui des dixaines, & le troisiéme, celui des unitez : on peut voir tout cela dans le nombre suivant.

Trilliards,	Billiards,	Milliards,	Millions,	Mille,	Unitez.
70,	425,	670,	383,	952,	104,
Dixaines Unitez	Centaines Dixaines Unitez	Centaines Dixaines Unitez	Centaines Dixaines Unitez	Centaines Dixaines Unitez	Centaines Dixaines Unitez

III.

6. On peut bien juger après ce que nous avons dit dans les remarques précédentes, que quoique chaque tranche contienne des centaines, des dixaines & des unitez ; cependant une tranche signifie des parties de nombre fort différentes de celles d'une autre tranche : par exemple, la tranche des millions marque des centaines, des dixaines & des unitez de millions ; celle des mille signifie des centaines, des dixaines & des unitez de mille ; ainsi des autres, comme nous l'avons marqué au-dessus des tranches dans le nombre précédent.

Quand nous disons que chaque tranche contient trois rangs ; sçavoir, des centaines, des dixaines, & des unitez, il en faut excepter la premiere à gauche, qui peut ne contenir que des dixaines & des unitez, ou des unitez seulement, s'il n'y a qu'un chiffre dans cette tranche.

IV.

7. Quand on nomme les rangs en particulier ; par exemple, ceux des milliards, on dit, centaines de milliards, dixaines de milliards ; mais il seroit inutile de dire, unitez de milliards ; on dit seulement, milliards : de même pour la tranche des millions, on dit, centaines de millions, dixaines de millions, & millions, au lieu d'unitez de millions ; ainsi des autres. Pour ce qui est de la derniere tranche, qui est celle des unitez, on dit seulement, centaines, dixaines & unitez, parce qu'il est inutile de dire, centaines d'unitez, dixaines d'u-

nitez & unitez d'unitez, ou unitez ſimples. Tout cela poſé, il ne ſera pas difficile de concevoir comment on peut nommer un nombre marqué par des chiffres, & comment on peut auſſi marquer par des chiffres un nombre propoſé : c'eſt ce que nous allons voir.

8. Pour nommer ou énoncer un nombre marqué en chiffres, il faut 1°. le partager en tranches, en commençant vers la droite ; en ſorte que chaque tranche contienne trois chiffres, excepté la premiere, c'eſt-à-dire, celle qui eſt la plus à gauche, qui pourra n'en contenir que deux, ou même un ſeul. 2°. Ne prononcer le terme propre à chaque tranche, que quand on eſt venu au rang des unitez, lequel rang eſt toujours le dernier à droite dans la tranche. 3°. Quand il ſe trouve des zeros dans quelques rangs, il ne faut point nommer les parties des nombres qui conviennent à ces rangs : par exemple, ſoit le nombre 45782539, 1°. je le partage en trois tranches par des virgules en cette maniere, 45, 782, 539, la premiere tranche, qui eſt celle des millions, ne contient que deux chiffres, ſçavoir 45 ; la ſeconde, qui eſt celle des mille, contient ceux-ci 782 ; la troiſiéme enfin contient les trois derniers 539. 2°. Je ne prononce le terme propre à chaque tranche que quand j'en ſuis venu aux unitez ; ainſi je ne dirai pas pour la premiere tranche, quarante millions, enſuite, cinq millions, mais je ne nommerai millions qu'après avoir exprimé 5, qui eſt au rang des unitez de millions ; je dirai donc, quarante-cinq millions : de même pour la ſeconde tranche, je ne dirai pas, ſept cent mille, enſuite quatre-vingt-mille, & enfin deux mille ; mais je dirai, ſept cent quatre-vingt deux mille : pour la derniere tranche, on dit ſimplement cinq cens trente-neuf, ſans ajouter le terme d'*unitez*, qui ſeroit inutile : toute la ſomme eſt donc quarante-cinq millions ſept cent quatre-vingt-deux mille cinq cens trente-neuf.

Pareillement, afin de nommer ce nombre 50400060, je remarque après l'avoir partagé en tranches de trois chiffres chacune, que dans la premiere tranche il y a un zero au rang des unitez de millions; c'est pourquoi il ne faut point parler des unitez de millions, mais seulement des dixaines, en disant, cinquante millions: de même dans la seconde tranche, qui est celle des mille, y ayant un zero au rang des dixaines, & un autre au rang des unitez de mille, il ne faut point parler ni des dixaines ni des unitez de mille; mais seulement des centaines, & dire, quatre cens mille: enfin dans la troisiéme tranche, n'y ayant que des zeros aux rangs des centaines & des unitez, je dirai simplement, soixante, sans parler de centaines & d'unitez: le nombre entier est donc cinquante millions quatre cens mille soixante. Nous allons parler à présent de la maniere dont il faut s'y prendre quand on veut exprimer en chiffres un nombre proposé.

9. Pour marquer par des chiffres une somme proposée, il faut d'abord écrire le nombre des millions, si la somme commence par des millions, ou le nombre des mille, si elle commence par des mille, ainsi du reste; il faut, dis-je, écrire le nombre des millions, sans s'embarrasser de ce qui suit, ensuite le nombre des mille, & enfin les centaines, les dixaines, & les unitez simples, observant de mettte des zeros aux rangs des parties de nombre desquelles il n'est point fait mention dans la somme proposée: par exemple, supposez que je veuille écrire en chiffres la somme suivante, cinquante-sept millions trois cens soixante-huit mille deux cens six; j'écris d'abord les millions en cette maniere, 57, sans faire attention à ce qui suit; après quoi je marque les mille en cette sorte, 368, & les mettant à côté des millions il vient 57368: enfin à la suite des mille je marque deux cens six de cette maniere, 206, écrivant un zero au rang des dixaines dont

on ne parle point dans la somme : ce qui donne le nombre proposé 57368206.

Soit encore le nombre trois cens millions vingt-trois-mille soixante-quatre, qu'il faut écrire en chiffres. Je marque en premier lieu les millions en cette sorte, 300, mettant des zeros aux rangs des dixaines & des unitez de millions, parce qu'il n'en est point fait mention dans la somme : j'écris ensuite les mille 023 à la droite des millions, mettant encore un zero au rang des centaines de mille dont il n'est point parlé ; après cela je marque le reste 064 à la suite des mille : dans cette derniere tranche j'ai écrit un zero au rang des centaines dont il n'est point parlé ; ces trois tranches écrites à côté les unes des autres font 300023064 : c'est la somme proposée exprimée en chiffres.

Voici un troisiéme exemple : si on me donnoit la somme suivante à écrire en chiffres, soixante-neuf milliards cinquante millions trois cens soixante, je la marquerois en cette sorte, 69050000360 : dans cet exemple j'ai mis trois zeros à la tranche des mille, parce qu'il n'en est point parlé dans la somme. Il est facile de voir par ce qu'on a dit jusqu'ici, pourquoi j'ai écrit chacun des autres chiffres, comme ils sont marquez.

10. Entre les nombres, on en distingue d'*incomplexes* & de *complexes*, d'*entiers* & de *fractionnaires* ou *rompus*.

11. Les nombres incomplexes sont ceux qui ne contiennent qu'une espece de quantitez, comme des livres : tel est le nombre 5236 livres.

12. Les nombres complexes sont ceux qui contiennent plusieurs especes de quantitez, comme des livres, des sols & des deniers : par exemple, 542 livres 15 sols 8 deniers, qu'on marque de cette maniere 542 l. 15 s. 8 den.

13. Un nombre entier est celui qui contient l'unité plusieurs fois exactement, comme 5, 9, 67, &c.

14. Un nombre fractionnaire, ou une fraction, eſt celui qui contient une ou pluſieurs parties égales d'un tout regardé comme l'unité : par exemple, ſi on regarde un écu comme l'unité, & qu'on conçoive l'écu diviſé en 12. parties égales, dont on en prenne 5, ces cinq douziémes feront une fraction que l'on écrit en cette ſorte $\frac{5}{12}$: il faut donc deux nombres pour former une fraction, dont l'un exprime combien l'on prend de parties égales, on l'appelle le *numérateur*, & l'autre marque en combien de parties le tout eſt diviſé, on l'appelle *dénominateur* ; le premier s'écrit au-deſſus d'une ligne, & l'autre au-deſſous, comme on le voit dans l'exemple propoſé : de même la fraction trois quatriémes s'écrit en cette forme $\frac{3}{4}$, ainſi des autres.

15. Quoique l'on ait dit, qu'il falloit deux nombres pour exprimer une fraction, on ne prétend pas en exclure l'unité qui peut être ou numérateur ou denominateur, comme dans les fractions $\frac{1}{5}$ & $\frac{3}{1}$; ainſi, quoique l'unité ne ſoit point, à proprement parler, un nombre ; cependant il arrivera pluſieurs fois, qu'en parlant des nombres en général, on y comprendra l'unité.

Il y a deux opérations générales dans l'Arithmétique, auſquelles toutes les autres ſe rapportent : ce ſont l'addition & la ſouſtraction : mais il y en a encore d'autres qui ont leurs utilités particulieres, & dont on traite ſéparément. Nous allons parler des quatre premieres opérations : ſçavoir l'*addition*, la *ſouſtraction*, la *multiplication*, & la *diviſion*. Ces quatre opérations ſont le fondement de toutes les autres ; c'eſt pourquoi nous les expliquerons avec étenduë.

DE L'ADDITION.

16. L'Addition eſt une opération par laquelle ayant pluſieurs nombres, on en cherche la ſomme : par exem-

ple, ſi ayant les deux nombres 12 & 18, on en cherche la ſomme, qui eſt 30, cela s'appelle ajoûter enſemble 12 & 18. On voit par la définition de l'addition, qu'elle conſiſte à trouver un tout dont on connoît les parties. Dans l'exemple propoſé, les deux parties connuës ſont 12 & 18, & le tout qu'on cherche eſt 30.

17. Afin de faire cette opération, il faut diſpoſer tous les nombres les uns ſous les autres, enſorte que les unitez répondent aux unitez, les dixaines aux dixaines, les centaines aux centaines, les mille aux mille, ainſi du reſte : enſuite on doit tirer une ligne au-deſſous des nombres ; après quoi on obſerve la regle ſuivante.

18. On commence par la colomne des unitez dont on prend la ſomme ; il peut arriver deux cas : ou bien cette ſomme peut s'exprimer par un ſeul chiffre, comme 8 ; & alors il faut écrire 8 au-deſſous des unitez ; ou la ſomme des unitez ne peut eſtre exprimée que par deux chiffres ; dans ce cas il faut écrire ſous la colomne des unitez, le dernier des deux chiffres, c'eſt-à-dire, celui qui eſt à la droite : par exemple, s'il y a 25 unitez, on met 5 ſous la colomne des unitez, & l'on retient 2 pour l'ajoûter aux dixaines qui ſont dans la colomne voiſine en allant vers la gauche. On opere de la même maniere ſur la colomne des dixaines, ſur celle des centaines, &c.

19. Remarquez que quand dans quelques-unes des colomnes, par exemple, celle des dixaines, il ne ſe trouve aucun chiffre poſitif, pour lors on met un zero au-deſſous, ſi on n'a rien retenu de la colomne des unitez : mais ſi on avoit retenu quelque choſe, par exemple 3, il faudroit écrire 3 ſous la colomne des dixaines.

EXEMPLE PREMIER.

Soient propoſez à ajoûter les nombres 3560252, 4630023, 6758200, 600433.

Après les avoir diſpoſez les uns ſous les autres, les unitez ſous les unitez, les dixaines ſous les dixaines, les centaines ſous les centaines, &c. comme on le voit ci-deſſous, il faut opérer en premier lieu ſur les unitez que l'on peut ajoûter en commençant indifféremment par le haut ou par le bas de la colomne : mais il eſt bon de choiſir une des deux manieres pour la ſuivre toujours : je commencerai par le haut de chaque colomne.

3560252
4630023
6758200
600433
15548908

Je dis donc : 2 & 3 font 5, 5 & 3 font 8 ; je poſe 8 ſous la colomne des unitez : je paſſe enſuite à la colomne des dixaines, en diſant : 5 & 2 font 7, 7 & 3 font 10 : cette ſomme des dixaines ne pouvant s'exprimer que par deux chiffres, j'écris le dernier, qui eſt 0 ſous la colomne des dixaines, & je retiens 1, qui eſt le premier chiffre de la ſomme 10, pour la colomne des centaines, à laquelle je paſſe en commençant par 1 que j'ai retenu ; je dis donc, 1 & 2 font 3, 3 & 2 font 5, 5 & 4 font 9, que j'écris ſous la colomne des centaines : enſuite je paſſe à celle des mille, dans laquelle il n'y a que huit qui ſoit poſitif, je mets donc 8 ſous cette colomne ; puis je viens à celle des dixaines de mille ; & je dis : 6 & 3 font 9, 9 & 5 font 14 ; je poſe le dernier chiffre 4 ſous cette colomne, & je retiens 1 pour la colomne des centaines de mille, ſur laquelle j'opere de la même maniere, en diſant : 1 & 5 font 6, 6 & 6 font 12, 12 & 7 font 19, 19 & 6 font 25 ; j'écris 5 ſous cette colomne, & je retiens 2 pour celle des millions ; je dis donc 2 & 3 font 5, 5 & 4 font 9, 9 & 6 font 15 ; je poſe 5 au-deſſous, & j'avance 1, qui reſte.

EXEMPLE II.

Soient encore proposez les quatre nombres suivans 3504802, 605900, 106300, 9402 dont il faut trouver la somme.

3504802
605900
106300
9402
4226404

Les ayant disposez, comme on le voit, je commence par ajoûter les chiffres de la colomne des unitez; de-là je passe aux dixaines, puis aux centaines, ainsi de suite, comme il a été prescrit, remarquant que je dois
* 19. poser zero sous la colomne des dixaines *, parce qu'elle ne contient aucun chiffre positif; & que d'ailleurs je n'ai rien retenu de la colomne des unitez: de même passant de la colomne des mille, de laquelle j'ai retenu 2, à celle des dixaines de mille, je n'ai trouvé aucun chiffre positif; ainsi je pose sous cette
* 19. colomne le 2 que j'avois retenu. *

AVERTISSEMENT.

Lorsque cette marque * se trouve à la marge avec un nombre à côté, cela signifie que la proposition qui répond à cette marque dépend de l'article désigné par le nombre. Ainsi après avoir dit dans l'explication du second exemple, qu'il falloit poser un zero sous la colomne des dixaines, on a mis le signe * tant après cette proposition que vis-à-vis à la marge avec le nombre 19, pour faire connoître que la proposition dépend de l'article 19. On a fait la même chose après avoir dit qu'il falloit écrire 2 sous la colomne des dixaines de mille.

20. On observe la même regle dans l'addition des nombres complexes, & on commence l'opération par les plus petites especes, en allant de suite aux plus grandes: sur quoi il faut remarquer qu'en passant d'une espece à une plus grande, comme des deniers aux sols, il faut voir combien de fois celle à laquelle on passe

eſt contenue dans la ſomme des plus petites, n'écrivant que le reſte, s'il y en a, ſous la moindre eſpece, & retenant le nombre de fois que la grande eſpece eſt contenue dans la ſomme des plus petites, pour ajoûter ce nombre à la plus grande: par exemple, ſi on paſſe des deniers aux ſols, & qu'il y ait 38 deniers, comme cette ſomme de 38 deniers contient 3 ſols & 2 deniers de plus, on écrira 2 ſous les deniers, & on retiendra 3 pour les ajoûter aux ſols.

De même, quand on paſſe des dixaines de ſols aux livres, il faut auſſi réduire ces dixaines en livres: or on ſçait qu'une livre vaut deux dixaines de ſols; c'eſt pourquoi il faut, ſi le nombre des dixaines eſt pair, en prendre la moitié, qui marquera les livres qui y ſont contenues: par exemple, s'il y avoit 8 dixaines de ſols, il faudroit prendre 4, qui eſt la moitié de 8, & ce 4 marque qu'il y a quatre livres dans huit dixaines de ſols; il n'y auroit donc rien à mettre ſous les dixaines de ſols; mais on retiendroit 4 pour l'ajoûter à la colonne des unitez de livres. Si le nombre des dixaines de ſols eſt impair, il en faut ôter une, que l'on écrira ſous les dixaines, & prendre la moitié du reſte: cette moitié marquant des livres, on l'ajoûtera à la colonne des unitez de livres: par exemple, s'il y avoit 5 dixaines de ſols, il en faudroit ôter une, & l'écrire ſous les dixaines de ſols; enſuite prendre 2, qui eſt la moitié du reſte 4, & l'ajoûter aux livres.

EXEMPLE PREMIER.

Si on me propoſe d'ajoûter les nombres complexes 35602 livres 15 ſols 8 deniers, 64923 l. 6. ſ. 11 d. 7043 l. 18 ſ. 9 d. & 58 l. 12 ſ. 10 d. je les diſpoſe de la maniere ſuivante, les unitez ſous les unitez, les dixaines ſous les dixaines, &c. obſervant de plus de placer les deniers d'un nombre ſous les deniers des autres nombres: il faut placer de même les ſols ſous les ſols, & les livres ſous les livres, comme on le voit.

	35602 l.	15 f.	8. d.
	64923	6	11
	7043	18	9
	58	12	10
	107628 l.	14 f.	2 d.

Je commence par les deniers, en disant : 8 & 11 font 19, & 9 font 28, 28 & 10 font 38 : cette somme contient 3 f. 2. d. c'est pourquoi je pose 2 sous les deniers, & je retiens trois pour l'ajoûter aux sols : s'il y avoit eu seulement 36 deniers, qui font 3 sols sans reste, il auroit fallu retenir 3 pour l'ajoûter aux sols, & on n'auroit pû mettre qu'un zero sous les deniers. Je viens ensuite aux sols, & je dis : 3 que j'ai retenu, & 5 font 8, 8 & 6 font 14, 14 & 8 font 22, 22 & 2 font 24, je pose le dernier chiffre 4 sous la colomne des unitez de sols, & je retiens 2, que j'ajoûte aux dixaines de sols, en disant : 2 & 1 font 3, 3 & 1 font 4, 4 & 1 font 5 : ce nombre étant impair, j'en ôte 1, que je pose sous la colomne des dixaines de sols, il reste 4 dont je prends la moitié, qui est 2, que j'ajouterai avec les livres.

Je passe donc aux livres, & je dis : 2 & 2 que j'ai retenu font 4, 4 & 3 font 7, 7 & 3 font 10, 10 & 8 font 18, je pose 8, & je retiens 1 que j'ajoûte à la colomne voisine ; opérant selon ce que nous avons dit dans le premier exemple de l'addition des nombres incomplexes.

EXEMPLE II.

Voici encore un exemple de l'addition des nombres complexes, où il s'agit d'ajoûter des toises, des pieds & des pouces. On sçait que la toise contient six pieds, & le pied douze pouces.

542 toises	4 pieds	10 pouces.
927	5	8
85	3	2
1556	1	8

REMARQUES.

REMARQUES.

I.

21. On peut remarquer que dans l'addition des nombres complexes qui contiennent des sols & des deniers, on opere en même tems sur les unitez & sur les dixaines de deniers, comme dans le premier exemple : au lieu que l'opération se fait par partie sur les sols ; en sorte qu'on ajoûte les unitez avant que de passer aux dixaines : cette différence vient de ce qu'il faut exactement un certain nombre de dixaines de sols pour faire une ou plusieurs livres ; au contraire, pour réduire les deniers en sols, on est obligé d'ajoûter des deniers aux dixaines : par exemple, pour un sol il faut une dixaine de deniers & deux de plus, c'est-à-dire, 12 deniers : pour 2 sols il faut 2 dixaines & quatre deniers de plus, c'est-à-dire, 24 deniers, &c. Par la même raison dans le second exemple, il faut ajoûter en même tems les unitez & les dixaines de pouces pour voir combien la somme contient de pieds.

II.

22. Quand on a beaucoup de nombres à ajoûter, il faut pour une plus grande facilité faire plusieurs additions, ensuite ajoûter toutes les sommes qu'on aura trouvées par ces additions, pour en faire la somme totale : par exemple, si on avoit 28 nombres à ajoûter, on pourroit prendre les dix premiers pour en faire une addition, puis les dix suivans pour en faire une seconde, & enfin les huit derniers pour une troisiéme, & après ces trois additions, il faudroit ajoûter ensemble les trois sommes qu'on auroit trouvées, ce qui donneroit la somme totale des vingt-huit nombres.

DE LA PREUVE DE L'ADDITION.

23. Si après l'addition on veut sçavoir si on ne s'est

pas trompé dans l'opération, il faut ôter de la ſomme totale qu'on a trouvée, tous les nombres qui ont été ajoûtez, & s'il ne reſte rien, c'eſt une marque que l'addition eſt bien faite, parçe que un tout eſt égal à toutes ſes parties priſes enſemble. Ainſi après avoir ôté de la ſomme totale, tous les nombres ajoûtez, s'il reſtoit quelque choſe, ou ſi on ne pouvoit pas ôter tous les nombres de cette ſomme, l'addition ſeroit mal faite, auquel cas il faudroit la recommencer.

24. Cette maniere de s'aſſurer ſi on a bien opéré, s'appelle *preuve de l'addition*, qui ſe pratique en cette ſorte : on commence par la premiere colomne, c'eſt-à-dire, celle qui eſt la plus à gauche, dont la ſomme doit être ôtée du chiffre ou des chiffres de la ſomme totale qui répondent à cette colomne, & on écrit le reſte au-deſſous, s'il y en a, pour le joindre par la penſée avec le caractere ſuivant de la ſomme totale : on paſſe enſuite à la ſeconde colomne dont la ſomme doit être auſſi ſouſtraite des caracteres ou du caractere qui lui répond dans la ſomme totale, écrivant toujours le reſte au-deſſous, s'il y en a, pour le joindre par la penſée au chiffre ſuivant de la ſomme totale : on pourſuit en obſervant la même méthode, & à la fin de la preuve il ne doit rien reſter. Cela s'entendra par un exemple.

8504
7609
3405
19518
1010

Pour faire la preuve de cette addition, j'opere en allant de bas en haut, en diſant : 3 & 7 font 10, 10 & 8 font 18, que j'ôte des chiffres correſpondans dans la ſomme totale, c'eſt-à-dire, de 19, il reſte 1, que j'écris ſous la premiere colomne : je le joins par la penſée à 5, qui eſt le chiffre ſuivant de la ſomme totale, ce qui fait 15, dont il faut ſouſtraire la ſeconde colomne ; je dis donc : 4 & 6 font 10, 10 & 5 font 15, que j'ôte de 15, reſte 0 que j'é-

cris au-dessous de 5 ; je passe ensuite à la troisiéme colomne, qui ne contient que des zeros, lesquels étant ôtez de 1, qui répond à cette colomne, il reste 1, qu'il faut joindre par la pensée à 8, ce qui fait 18, dont il faut ôter la quatriéme colomne ; ainsi je dis : 5 & 9 font 14, 14 & 4 font 18, que j'ôte de 18, il ne reste rien ; ce qui fait voir que l'addition est bien faite.

8504
7609
3405
19518
1010

On se sert de la même méthode pour la preuve de l'addition des nombres complexes, en remarquant néanmoins que quand on passe des plus grandes especes aux moindres, on réduit ce qui reste de la somme des plus grandes aux moindres qui suivent, par exemple les livres en dixaines de sols, & les sols en deniers. Nous allons appliquer cette méthode à une addition de nombres complexes.

370 liv.	18 f.	9. den.
493	14	11
6	9	7
871	3	3
112	22	0

Pour faire la preuve de cette addition, je commence par la premiere colomne, & je dis : 4 & 3 font 7, que j'ôte de 8, il reste 1, que j'écris au-dessous du 8, je le joins par la pensée à 7, ce qui fait 17 : ensuite je dis : 9 & 7 font 16, que j'ôte de 17, reste 1, que je pose sous 7 ; je le conçois joint à 1 qui suit, ce qui fait 11, d'où j'ôte 9, qui sont à la colomne correspondante, il reste 2, c'est-à-dire, 2 livres qu'il faut réduire en 4 dixaines de sols ; il faut donc concevoir 4 sous la colomne des dixaines de sols, & soustraire ces dixaines de 4 ; il restera 2, que j'écris sous cette colomne : ce 2 étant joint par la pensée avec le 3 qui suit, j'aurai 23, dont je dois ôter la colomne des unitez de sols ; je dis donc : 9 & 4 font 13, 13 & 8 font 21, qui étant ôtez de 23, il reste 2, qu'il faut mettre

sous 3. Ce 2 marque 2 sols, qui valent 24 deniers, lesquels il faut ajoûter avec les trois autres qui sont sous la colomne des deniers, cela fera 27, dont il faut ôter les deniers des trois nombres; il y en a 27, qui ôtez de 27, il ne reste rien : ce qui est une marque que l'addition est bien faite.

Voici encore une addition complexe, dont on a fait la preuve, comme dans l'exemple précédent, en observant que quand on a passé des livres aux dixaines de sols, comme il y avoit 2 livres de reste, on les a réduit en 4 dixaines, ausquelles on a ajoûté celle qui se trouvoit sous la colomne des dixaines de sols; ce qui a fait 5 qu'il a fallu concevoir à la place de 1 qui est sous cette colomne: on a ensuite ôté du 5 les 3 dixaines de la colomne, & on a écrit le reste 2 sous 1 pour le joindre par la pensée au 2 qui est sous la colomne des unitez de sols. De même lorsqu'on a passé des sols aux deniers, il a fallu réduire un sol qui restoit, en 12 deniers, que l'on a ajoûté à 11, qui sont sous les deniers, & de la somme 23 on a soustrait les deniers qui sont au-dessus : ce qui étant fait, il n'est rien resté; ainsi l'addition est bien faite.

269	16	11
790	18	3
84	17	9
1145	12	11
212	21	0

25. Il ne nous reste plus qu'à donner la démonstration de l'addition. On entend par démonstration d'une opération, la raison sur laquelle est fondée la regle prescrite pour cette opération; c'est pourquoy il y a beaucoup de différence entre la démonstration & la preuve d'une opération, puisque par la démonstration on fait voir que la regle prescrite pour l'addition, par exemple, est infaillible; au lieu que la preuve ne sert qu'à faire connoître qu'on a observé cette regle dans les exemples particuliers.

DÉMONSTRATION DE L'ADDITION.

26. On cherche par l'addition une somme totale qui contienne plusieurs nombres proposez. Or en suivant la regle prescrite pour l'addition, on trouve la somme totale qui contient tous les nombres proposez, puisqu'on prend la somme des unitez, celle des dixaines, celle des centaines, celle des mille, & ainsi des autres parties des nombres; par conséquent si on suit la regle prescrite pour l'addition, on trouve nécessairement la somme totale de tous les nombres qu'il falloit ajoûter.

DE LA SOUSTRACTION.

27. La soustraction est une opération par laquelle on ôte un moindre nombre d'un plus grand: par exemple, si on ôte 9 de 12, c'est une soustraction. Le nombre qui résulte de la soustraction est appellé *reste* ou *différence*: Dans nostre exemple 3 est le reste ou la différence des nombres 12 & 9. Il est visible par la définition de la soustraction, que cette opération consiste à chercher une partie d'un tout dont on connoît déja une partie aussi-bien que le tout: dans l'éxemple proposé le tout est 12, la partie connuë est 9, & le reste 3 est l'autre partie qu'on cherchoit.

28. Lorsqu'on ajoûte le même nombre à deux autres, la différence de ces deux nombres est toûjours la même avant & après l'addition: si par exemple on ajoûte 6 à 12 & à 9, la différence des sommes 18 & 15 est la même que celle des nombres 12 & 9.

29. Pour faire la soustraction, il faut écrire le nombre que l'on veut soustraire au-dessous de l'autre; en sorte que les unitez de l'un répondent aux unitez de l'autre, les dixaines aux dixaines, les centaines aux centaines, &c. ensuite tirer une ligne au-dessous des deux nombres, après quoi on doit observer la regle suivante: On commence par ôter les unitez du nombre

à soustraire, des unitez de l'autre : il peut arriver trois cas ; le premier, que le chiffre inférieur qui marque les unitez soit plus petit que le supérieur ; pour lors on écrit le reste au-dessous dans le même rang : le second cas, est lorsque les deux chiffres sont égaux : dans ce second cas on met un zero au-dessous, parce que le caractere inférieur étant ôté de l'autre, il ne reste rien.

Le troisiéme cas enfin, est quand le caractere inférieur est plus grand que le supérieur ; alors il faut ajoûter une dixaine au chiffre supérieur ; ensuite de la somme composée de cette dixaine & de ce chiffre, ôter celui qui est au-dessous, & écrire le reste sous la ligne dans le même rang : par exemple, si on vouloit soustraire 28 de 43, il faudroit après les avoir disposez en cette maniere $\frac{43}{28}$, ajoûter d'abord 10 à 3 ; ensuite retrancher 8 de la somme 13 composée de 10 & de 3 ; enfin écrire le reste 5 au-dessous de 8.

Comme dans ce troisiéme cas on a ajoûté une dixaine au nombre dont on veut soustraire, on doit ajoû-
* 28. ter tout autant au nombre que l'on doit soustraire *, c'est pourquoi il faut supposer que dans ce dernier nombre le chiffre du rang précedent est augmenté d'une unité ; laquelle est égale à la dixaine ajoûtée au chiffre plus reculé d'un rang vers la droite dans le nombre su-
* 4. périeur * : dans l'exemple proposé, 2 est le chiffre qui précede le 8 d'un rang vers la gauche dans le nombre à soustraire 28 ; il faut par conséquent ajoûter 1 à 2. On opere de la même maniere sur les autres chiffres selon les trois différens cas.

EXEMPLE I.

Soit le nombre 5243 dont il faut ôter 4328 : après les avoir disposez comme nous l'avons dit ; en sorte que les unitez répondent aux unitez, les dixaines aux dixaines, &c.

Je dis : 8 de 3, cela ne se peut : j'ajoûte une dixaine à 3 *, en disant : 10 & 3 font 13 : 8 de 13 reste 5 que j'écris sous 8 ; ensuite il faut dire, je retiens 1 : après cela j'ajoûte cet 1 à 2 qui précede 8 dans le nombre inférieur ; ce qui fait 3 ; je dis donc : 3 de 4, reste 1 que j'écris au-dessous de 2 : j'opere de la même maniere sur les centaines, en disant : 3 de 2, cela ne se peut ; ainsi j'ajoûte une dixaine à 2 *, & je dis 10 & 2 font 12 : 3 de 12 reste 9 que je pose sous 3, & je retiens 1 qu'il faut ajoûter au 4 précedent du nombre inférieur ; je dirai donc 1 & 4 font 5, 5 de 5 reste 0, qu'il est inutile d'écrire au-dessous, parce qu'il n'y a plus de chiffre à mettre avant lui.

5243
4328
915

* 29. III. Cas

* 29. III. Cas

EXEMPLE II.

Soit encore cet autre exemple de soustraction à faire selon la même méthode.

Je dis : 7 de 4, cela ne se peut, j'ajoûte donc une dixaine à 4 *, en disant : 10 & 4 font 14, 7 de 14, reste 7 que j'écris au-dessous, & je retiens 1 : je dis ensuite : 1 que j'ai retenu & 6 font 7 ; 7 de 0, cela ne se peut ; c'est pourquoi j'ajoûte une dixaine au zero, en disant : 10 & 0 font 10 : 7 de 10, reste 3 que je pose sous 6, & je retiens 1 : j'ajoûte cet 1 au 0 précedent du nombre inférieur, la somme est 1 qui ne peut être ôtée de 0 qui est au-dessus ; il faut donc ajoûter une dixaine à ce 0, en disant : 10 & 0 font 10 : 1 de 10, reste 9, que j'écris sous 0, & je retiens 1 : j'ajoûte cet 1 à 5, la somme est 6 qui ne peut être ôtée du 0 qui est au-dessus ; c'est pourquoi je dois ajoûter une dixaine & dire : 10 & 0 font 10 : 6 de 10, reste 4 & je retiens 1 qu'il faut ajoûter à 2, la somme est 3 que j'ôte de 5, il reste 2 que je mets au-dessous : enfin j'écris les trois chiffres 607 du nom-

60750004
25607
60724937

* 29. III. Cas

bre ſuperieur tels qu'ils ſont, parce qu'il n'y a point de chiffres correſpondans dans le nombre à ſouſtraire.

Si les deux nombres propoſez étoient complexes, ou au moins un des deux, il faudroit obſerver la même méthode, en commençant par les plus petites eſpeces, & allant de ſuite aux plus grandes, comme on le verra dans les exemples ſuivans.

EXEMPLE I.

Soit le nombre 5308 liv. 15 ſ. 9 den. dont il faut ſouſtraire 407 liv. 18 ſ. 6 d. Après les avoir diſpoſez de maniere que les livres répondent aux livres, les ſols aux ſols, & les deniers aux deniers en cette ſorte :

5308 liv.	15 ſ.	9 d.
407	18	6
4900	17	3

Je commence par les deniers, en diſant : 6 de 9, reſte 3 que j'écris ſous 6 : enſuite je paſſe aux ſols, & je dis : 18 de 15, cela ne ſe peut, il faut ajoûter une livre reduite en ſols, (ce qui ſe fait toûjours quand on eſt obligé d'ajoûter quelque choſe aux ſols) 20 & 15 font 35, dont j'ôte 18, il reſte 17 que j'écris ſous 18; après cela je paſſe aux livres, & me ſouvenant que j'ai ajoûté une livre au nombre ſupérieur, j'ajoûte auſſi une livre au 7 qui marque les unitez de livres du nombre inférieur; ainſi je dis 1 & 7 font 8, que j'ôte du 8 qui eſt deſſus, il reſte 0 que j'écris ſous 7; puis je continuë en diſant : 0 de 0 reſte 0 que j'écris au-deſſous : enſuite je dis 4 de 3, cela ne ſe peut, j'ajoûte 10 à 3, la ſomme eſt 13, de laquelle ôtant 4, il reſte 9 que je poſe ſous 4, & je retiens 1 que je ne puis ajoûter à aucun chiffre, n'y en ayant point avant 4; c'eſt pourquoi j'ôte ſeulement 1 de 5, il reſte 4 que j'écris au-deſſous de 5, & la ſouſtraction eſt achevée.

EXEMPLE II.

Soit encore le nombre 725 livres dont il faut ôter celui-ci 23 livres 16 sols 11 deniers.

725 liv.	o f.	o d.
23	16	11
701	3	1

Le premier ne contenant ni sols ni deniers, il en faut ajoûter par la pensée, afin de pouvoir ôter le second; je suppose donc qu'il y a un sol réduit en 12 deniers (on n'ajoûte jamais moins aux deniers) & je dis 11 de 12, reste 1 que j'écris au-dessous: après quoi je passe aux sols, me souvenant que j'ai ajoûté 1 s. ou 12 den. au nombre supérieur, & qu'il faut par conséquent ajoûter aussi un sol au nombre inférieur; je dis donc: 1 & 16 font 17: laquelle somme ne pouvant être ôtée de o qui est au-dessus, il faut concevoir une livre réduite en sols, comme dans l'exemple precedent; d'où ôtant 17, il reste 3 que je mets au-dessous de 6: je passe ensuite aux livres; mais ayant ajoûté une livre au nombre dont on veut soustraire, j'en ajoûte aussi une au nombre à soustraire; je dis donc: 1 & 3 font 4, qui étant ôté de 5, il reste 1, que je pose au-dessous: puis j'ôte 2 de 2, il reste o que j'écris dans ce rang: enfin je pose le 7 avant ce zero, n'y ayant rien qui doive en être ôté.

EXEMPLE III.

Voici un exemple de soustraction dont les nombres contiennent des toises, des pieds & des pouces. Nous donnons cet exemple tout fait, sans nous arrêter à l'expliquer au long: cela seroit inutile après ce que nous avons dit dans les exemples précedens.

820 toises	4 pieds	9 pouces.
30	5	4
789	5	5

REMARQUES.

I.

30. Dans les exemples de ſouſtraction complexe où il y a au moins dix ſols dans un des nombres, on pourroit faire la ſouſtraction par partie ſur les ſols, en ôtant d'abord les unitez des unitez, & enſuite les dixaines des dixaines; mais l'opération eſt plus courte & plus facile en la faiſant comme nous l'avons faite.

II.

31. Si on avoit pluſieurs nombres à ſouſtraire de pluſieurs autres, il faudroit 1°. ajoûter tous les nombres deſquels on voudroit ſouſtraire, en une ſomme totale. 2°. Ajoûter auſſi tous les nombres à ſouſtraire pour en avoir la ſomme totale. 3°. Enfin ôter la ſeconde de ces deux ſommes de la premiere.

Il y a une autre méthode fort commune de faire la ſouſtraction, que nous n'expliquons pas ici, parce qu'elle n'eſt pas plus facile à pratiquer que celle que nous avons donnée, & que d'ailleurs les commençans pourroient confondre ces deux méthodes dans l'opération; ce qui cauſeroit des fautes de calcul.

DE LA PREUVE DE LA SOUSTRACTION.

32. La preuve de la ſouſtraction ſe fait par l'addition; c'eſt-à-dire, qu'il faut ajoûter le nombre à ſouſtraire avec le reſte, & la ſomme des deux ſera égale au nombre dont on a ſouſtrait, ſi la ſouſtraction eſt bien faite. La raiſon en eſt que le nombre à ſouſtraire & le reſte ſont les deux parties du nombre total dont on veut ſouſtraire; par conſéquent en ajoûtant ces deux parties enſemble, il en réſultera une ſomme égale au tout, c'eſt-à-dire, au nombre dont on vouloit ſouſtraire.

Nous allons donner la preuve du premier exemple sur les nombres complexes sans l'expliquer, parce qu'elle est assez facile à entendre.

5308 liv.	15 s.	9 den.
407	18	6
4900	17	3
5308	15	9

DÉMONSTRATION DE LA SOUSTRACTION.

33. On se propose dans la soustraction de trouver le reste du nombre dont on veut soustraire, après en avoir ôté le nombre à soustraire. Or en suivant la regle qu'on a donnée, on trouvera ce reste; puisque selon cette regle on prend le reste des unitez, celui des dixaines, celui des centaines, celui des mille, &c. Donc on trouvera le reste du nombre dont il faut soustraire, lequel reste exprime l'excès de ce nombre sur l'autre que l'on vouloit soustraire.

DE LA MULTIPLICATION.

34. Multiplier un nombre par un autre, c'est prendre le premier autant de fois qu'il est marqué par le second: par exemple, multiplier 5 par 3, c'est prendre 5 autant de fois qu'il est marqué par 3, c'est-à-dire, trois fois: ce qui fait 15; il y a donc trois nombres à distinguer dans la multiplication; sçavoir, le ***multiplicande***, le ***multiplicateur*** & le ***produit***. Le multiplicande ou le multiplié est le nombre qu'on multiplie: dans l'exemple proposé 5 est le multiplié. Le multiplicateur est celui par lequel on multiplie, comme 3 dans le même exemple. Le produit est le nombre qui résulte de la multiplication; ainsi 15 est le produit de 5 par 3.

35. On peut définir la multiplication, une opération par laquelle on trouve un nombre, qu'on nomme produit, qui contient autant de fois le multiplié, que le multiplicateur contient l'unité: par exemple, si on

multiplie 9 par 8, on trouvera pour produit un nombre, ſçavoir 72, qui contient 9 huit fois, de même que 8 contient huit fois 1. Cela eſt évident par l'expreſſion même dont on ſe ſert dans la multiplication, puiſque pour multiplier 9 par 8, on dit huit fois 9; ainſi le produit doit contenir 9 huit fois, c'eſt-à-dire, autant de fois que 8 contient l'unité.

36. Il ſuit de la notion de la multiplication, que quand le multiplicateur eſt plus grand que l'unité, pour lors le produit eſt plus grand que le multiplicande autant de fois qu'il eſt marqué par le multiplicateur : par exemple, en multipliant 9 par 8, on trouve le produit 72, qui eſt huit fois plus grand que le multiplicande.

Il y a deux ſortes de multiplications, la *ſimple* & la *compoſée*. La multiplication ſimple eſt celle dont le multiplicateur eſt exprimé par un ſeul chiffre : telle eſt la multiplication de 264. par 5. La multiplication compoſée eſt celle dont le multiplicateur a pluſieurs caractères : comme ſi on multiplie 85304 par 54.

On fera voir dans l'Algebre lorſqu'on parlera de la multiplication des grandeurs en général, exprimées par des lettres, que le produit de deux chiffres, comme 4 & 3, eſt toûjours le même, ſoit que l'on multiplie le premier par le ſecond, ſoit que l'on multiplie le ſecond par le premier.

Nous ſuppoſons que l'on ſçait les produits des neuf chiffres poſitifs 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, multipliez les uns par les autres : c'eſt une choſe néceſſaire avant que de paſſer plus loin. Nous allons donner une Table qui contient tous ces produits : les commençans ne doivent pas ſe ſervir de cette Table pour y chercher les produits, lorſqu'ils veulent faire une multiplication : elle doit ſervir plûtôt à apprendre l'ordre de ces produits qu'il faut chercher ſoi-même, & les repaſſer pluſieurs fois dans ſon eſprit, afin de les retenir exactement.

TABLE POUR LA MULTIPLICATION.

1	fois 1	c'eſt 1	2	fois 1	font 2	3	fois 1	font 3
1	2	2	2	2	4	3	2	6
1	3	3	2	3	6	3	3	9
1	4	4	2	4	8	3	4	12
1	5	5	2	5	10	3	5	15
1	6	6	2	6	12	3	6	18
1	7	7	2	7	14	3	7	21
1	8	8	2	8	16	3	8	24
1	9	9	2	9	18	3	9	27
4	1	4	5	1	5	6	1	6
4	2	8	5	2	10	6	2	12
4	3	12	5	3	15	6	3	18
4	4	16	5	4	20	6	4	24
4	5	20	5	5	25	6	5	30
4	6	24	5	6	30	6	6	36
4	7	28	5	7	35	6	7	42
4	8	32	5	8	40	6	8	48
4	9	36	5	9	45	6	9	54
7	1	7	8	1	8	9	1	9
7	2	14	8	2	16	9	2	18
7	3	21	8	3	24	9	3	27
7	4	28	8	4	32	9	4	36
7	5	35	8	5	40	9	5	45
7	6	42	8	6	48	9	6	54
7	7	49	8	7	56	9	7	63
7	8	56	8	8	64	9	8	72
7	9	63	8	9	72	9	9	81

DE LA MULTIPLICATION SIMPLE.

Quand on veut multiplier un nombre par un multiplicateur qui ne contient qu'un seul chiffre, il faut écrire le multiplicande, & mettre le multiplicateur au-dessous au rang des unitez, puis tirer une ligne sous le multiplicateur : ensuite on observera la regle suivante.

37. On commence cette opération par la droite, comme les deux précedentes ; c'est-à-dire, qu'on multiplie d'abord le chiffre qui est au rang des unitez du multiplicande, par le multiplicateur ; & si le produit de ce chiffre peut s'exprimer par un seul caractere, on l'écrit sous le rang des unitez : mais si ce produit ne peut être marqué que par deux chiffres, on met le dernier sous le rang des unitez, & on retient le premier pour l'ajoûter au produit des dixaines, sur lesquelles on opere de la même maniere, comme aussi sur les centaines, sur les mille, &c.

38. Remarquez que s'il y avoit un zero dans quelqu'un des rangs du multiplicande, il faudroit mettre au produit, dans le rang qui répondroit au zero, le chiffre qu'on auroit retenu de la multiplication précédente, si on avoit retenu quelque chose : mais si on n'avoit rien retenu, on ne pourroit écrire que zero à ce rang.

EXEMPLE I.

Soit le nombre 6723 à multiplier par 4. Après avoir disposé ces deux nombres comme nous avons dit, & avoir tiré une ligne ; je dis : 4 fois 3 font 12 ; je pose 2 sous 4, (ce 2 est le dernier des deux chiffres du produit 12,) & je retiens 1 pour l'ajoûter au produit des dixaines. Je multiplie ensuite 2 par 4, le produit est 8, auquel ajoûtant 1 que j'ai retenu, la somme est 9 que j'écris sous 2 ; après cela je passe au rang des

$$\begin{array}{r} 6723 \\ 4 \\ \hline 26892 \end{array}$$

centaines, en diſant : 4 fois 7 font 28, j'écris le dernier chiffre 8 de ce produit ſous 7, & je retiens le premier qui eſt 2 pour l'ajoûter au produit des mille ; enfin je dis : 4 fois 6 font 24, & 2 que j'ai retenu font 26, je poſe 6 ſous le 6, & j'avance 2, c'eſt-à-dire, que je l'écris avant le 6 : le produit total eſt 26892.

EXEMPLE II.

Soit le nombre 50207 à multiplier par 3. Après avoir écrit le multiplicateur 3 ſous le multiplicande, je multiplie 7 par 3, en diſant : 3 fois 7 font 21, je poſe 1 ſous 7, & je retiens 2. Enſuite je dis 3 fois 0 c'eſt 0 ; mais ayant retenu 2, je l'écris ſous 0 * : puis * 38.
je viens au 2 qui exprime des centaines, & je multiplie par 3, le produit eſt 6 que je mets au-deſſous ; puis je multiplie le 0 qui eſt au rang des mille par 3, le produit eſt 0 que je mets au même rang dans le produit * ; parce que je n'ai rien retenu de la multiplica- * 38.
tion du chiffre précedent. Enfin je multiplie 5 par 3, le produit eſt 15, je poſe 5 & je mets 1 au-devant. Le produit total eſt donc 150621.

$$\begin{array}{r} 50207 \\ 3 \\ \hline 150621 \end{array}$$

DE LA MULTIPLICATION COMPOSE'E.

39. Lorſque le multiplicateur a pluſieurs caracteres, on multiplie d'abord tout le multiplicande par le chiffre qui eſt au rang des unitez du multiplicateur, ſelon la regle de la multiplication ſimple. 2°. On multiplie de même le multiplicande entier par le chiffre qui eſt au rang des dixaines du multiplicateur, obſervant de mettre le dernier caractere de ce ſecond produit au rang des dixaines. 3°. S'il y a plus de deux chiffres au multiplicateur, on multiplie encore tout le multiplicande par le chiffre qui eſt au rang des centaines du multiplicateur, mettant le dernier chiffre de ce troiſiéme produit au rang des centaines. On continuë de multiplier tout

le multiplicande par chacun des chiffres du multiplicateur, & de mettre le dernier chiffre de chaque produit au rang du chiffre, par lequel on multiplie. Ces multiplications particulieres étant faites, on ajoûte tous les produits qui en viennent, & la somme résultante est le produit total.

Nous entendons toûjours par le dernier chiffre, celui qui est le plus à droite.

EXEMPLE I.

Soit le nombre 523407 à multiplier par 546. Pour faire cette multiplication, 1°. Je multiplie tout le multiplicande par 6 qui est au rang des unitez, & je mets le produit qui en vient sous la ligne; en sorte que le dernier chiffre réponde au rang des unitez du multiplicateur: 2°. Je multiplie aussi le multiplicande par 4 qui est au rang des dixaines, écrivant le dernier chiffre de ce produit au rang des dixaines: 3°. Je multiplie encore le multiplicande par 5, & j'écris le dernier chiffre du produit qui en vient au rang des centaines. Enfin je fais l'addition de tous les produits particuliers, & la somme 285780222 est le produit total.

```
   523407
      546
 --------
  3140442
 2093628
2617035
---------
285780222
```

EXEMPLE II.

S'il y avoit un ou plusieurs zeros au multiplicateur, il faudroit de même multiplier les chiffres du multiplicande par les zeros, aussi-bien que par les chiffres positifs du multiplicateur, comme on peut voir en cet exemple.

```
    52043
     7005
 --------
   260215
   00000
  00000
364301
---------
364561215
```

REMARQUES.

REMARQUES.

I.

40. Lorſqu'il y a des zeros au multiplicateur, comme dans cet exemple, les produits particuliers du multiplicande par ces zeros du multiplicateur, ne contiennent que des zeros : ce qui n'augmente pas le produit total, quand on vient à faire l'addition des produits particuliers ; c'eſt pourquoi on n'écrit ces zeros que pour garder le rang des chiffres des produits particuliers ſuivans ; ainſi on pourroit n'écrire qu'un zero pour chacun des produits qui viennent quand on multiplie par zero, & mettre à côté, vers la gauche, le produit poſitif qui ſuit : on pourroit donc arranger les produits particuliers de la multiplication de l'exemple précedent, en cette façon.

52043
7005
260215
36430100
364561215

II.

41. Quoi qu'il ſoit indifférend de prendre l'un ou l'autre des deux nombres pour multiplicateur ; cependant on choiſit ordinairement le plus petit, parce que y ayant pour lors moins de produits particuliers, la multiplication eſt plus commode.

DE LA PREUVE DE LA MULTIPLICATION.

42. La preuve de la multiplication ſe fait par l'opération oppoſée, je veux dire la diviſion ; enſorte qu'on diviſe le produit par le multiplicateur, & ſi le quotient eſt égal au multiplicande, c'eſt une marque que la multiplication eſt bien faite : ſi-non il y a quelque erreur de calcul. En parlant de la preuve de la diviſion, on verra pourquoy on ſe ſert de la diviſion pour prouver la multiplication.

43. Mais comme la diviſion eſt plus difficile à faire que la multiplication, il paroît qu'il ſeroit plus à propos de refaire la multiplication d'une autre maniere, en prenant pour multiplicateur le nombre qui étoit multiplicande, à la place duquel on ſubſtitueroit celui qui étoit multiplicateur : pour lors il faudroit que le produit qui viendroit, en s'y prenant de cette maniere, fût égal à celui qu'on auroit eû d'abord : voici un exemple.

1305	426
426	1305
7830	2130
2610	12780
5220	426
555930	555930

44. Remarquez que la preuve d'une opération ſe peut toûjours faire par l'opération contraire. Nous avons déja vû que la preuve de l'addition ſe fait par la ſouſtraction, & que celle de la ſouſtraction ſe faiſoit par l'addition : nous venons de dire que la preuve de la multiplication ſe pouvoit faire par la diviſion : nous verrons dans la ſuite que la diviſion ſe prouve par la multiplication.

DEMONSTRATION DE LA MULTIPLICATION.

45. La regle preſcrit de multiplier tous les chiffres du multiplicande par le multiplicateur, & par conſéquent en ſuivant cette regle on trouvera le produit des unitez, des dixaines, des centaines, des mille, &c; ainſi on aura le produit du multiplicande entier par le multiplicateur. Ce qu'il fal. dem.

* 56. On verra dans la ſuite *, pourquoi dans la multiplication compoſée, il faut écrire le dernier chiffre de

chaque produit particulier au rang du chiffre par lequel on multiplie.

46. Nous avons dit que la multiplication se rapportoit à l'addition : c'est ce que l'on peut voir à present ; en effet, la multiplication n'est qu'une espece d'addition, dont les nombres à ajoûter sont égaux ; par exemple, multiplier 4850 par 225, c'est la même chose que si on écrivoit 4850 autant de fois qu'il est marqué par 225, ensorte que tous ces nombres égaux fussent les uns sous les autres, & qu'ensuite on fit l'addition, ce qui seroit fort long ; c'est pourquoi on a inventé la multiplication qui est une maniere abregée de faire cette sorte d'addition de nombres égaux.

La raison de cela, c'est que multiplier 4850 par 225, c'est prendre 4850 deux cens vingt-cinq fois ; & par conséquent c'est la même chose que si on avoit deux cens vingt-cinq nombres égaux chacun à 4850 desquels on chercheroit la somme par l'addition.

47. La multiplication sert à réduire les grandes especes à de plus petites qui y sont contenuës exactement : ce qui se fait en multipliant le nombre des grandes especes par un autre nombre qui exprime combien de fois la petite est contenuë dans la grande : par exemple, pour sçavoir combien de livres valent 4203 Loüis d'or de 24 livres chacun ; il faut multiplier 4203 par le nombre 24 qui exprime combien de fois la livre est contenuë dans un Loüis d'or supposé de 24 livres.

De même pour réduire un nombre de pieds en pouces, il faut multiplier ce nombre de pieds par 12, parce que le pied contient 12 pouces.

Pour réduire aussi une somme de livres en sols, il faut multiplier la somme des livres par 20, parce qu'une livre vaut 20 sols.

Voici la raison de cet usage appliquée au premier exemple : puisque le Loüis d'or vaut 24 livres, le nom-

bre des livres contenu dans une somme de Loüis doit être vingt-quatre fois plus grand que le nombre des Loüis d'or. Or, pour avoir un nombre qui soit vingt-quatre fois plus grand que celui des Loüis, il faut
* 36. multiplier le nombre des Loüis par 24 *. C'est la même raison pour les autres exemples.

48. Lorsque le multiplicande & le multiplicateur sont égaux, le produit se nomme *quarré* : par exemple, si on multiplie 532 par 532, le produit 283024 s'appelle quarré de 532 ; le quarré d'un nombre est donc le produit de ce nombre multiplié par lui-même : le quarré de 2 est 4, le quarré de 3 est 9, celui de 4 est 16, celui de 5 est 25, &c. Le nombre que l'on a multiplié pour avoir un quarré est appellé *racine quarrée* : dans les exemples ci-dessus, la racine quarrée de 283024 est 532, celle de 4 est 2, celle de 9 est 3, celle de 16 est 4, celle de 25 est 5, &c.

MANIERE ABREGE'E DE FAIRE la Multiplication en certains cas.

Il y a certains cas où l'on peut abréger la pratique de la multiplication.

49. 1°. Quand le multiplicateur est l'unité suivie d'un ou de plusieurs zeros, on peut abréger l'opération en écrivant au produit le multiplicande, & en mettant à la fin autant de zeros qu'il y en a au multiplicateur, comme dans cet exemple.

$$\begin{array}{r} 5032 \\ 100 \\ \hline 503200 \end{array}$$

50. 2°. Quoi qu'il y ait au multiplicateur des chiffres différens de l'unité suivis d'un ou de plusieurs zeros, on peut toûjours abréger l'opération en multipliant le multiplicande par les chiffres positifs du multiplicateur, & mettant les zeros à la fin de la somme totale des produits particuliers : en voici des exemples.

```
 7203
   40
------
288120
```

```
   2045
   3600
-------
  12270
 6135
-------
7362000
```

51 3°. Enfin s'il y avoit des chiffres positifs suivis de zeros à la fin tant du multiplicateur que du multiplicande, il faudroit faire la multiplication comme s'il n'y avoit point de zeros à la fin de l'un, ni de l'autre, & ajoûter au produit total la somme des zeros qui se trouveroient après tous les chiffres positifs du multiplicande & du multiplicateur : voici un exemple.

```
    5302000
       6400
-----------
   21208
  31812
-----------
33932800000
```

S'il n'y avoit des zeros qu'à la fin du multiplicande, on voit bien qu'on pourroit encore abréger l'opération de la même maniere, en mettant les zeros du multiplicande à la fin du produit total. Exemple.

```
  5302000
       64
---------
  21208
 31812
---------
339328000
```

52. Remarquez qu'il ne s'agit ici uniquement que des zeros qui sont après tous les chiffres positifs du multiplicande & du multiplicateur ; c'est pourquoi le zero, qui dans l'exemple précedent est entre le 3 & le 2 du multiplié, ne doit pas être mis à la fin du produit total : mais on doit opérer sur lui selon les regles ordinaires.

53. Afin d'entendre les raisons de toutes ces manieres abrégées de faire la multiplication, il faut sçavoir qu'en mettant un zero à la fin d'un nombre, on le rend dix fois plus grand ; si on en met deux, on le

rend cent fois plus grand ; si on en met trois, on le rend mille fois plus grand, &c. Par exemple, en écrivant un zero à la fin de 5032, il vient 50320 qui vaut dix fois plus que le premier : car dans ce nombre 50320, le 2 vaut des dixaines, le 3 des centaines, le 5 des dixaines de mille ; au lieu que dans le premier nombre 5032 le 2 ne vant que des unitez, le 3 que des dixaines, le 5 que des mille ; il est donc évident que chaque chiffre du second nombre vaut dix fois plus que dans le premier. Si on mettoit deux zeros à la fin de 5032, chaque chiffre vaudroit cent fois plus ; si on en mettoit trois, il vaudroit mille fois plus, &c.

54. De-là il suit selon le premier cas, que pour multiplier 5032 par 100, il n'y a qu'à écrire à la fin du multiplicande les deux zeros du multiplicateur : car le produit de 5032 par 100 est un nombre cent fois
* 36. plus grand que 5032. * Or en écrivant deux zeros à la fin du multiplicande 5032, on rend ce nombre cent fois plus grand.

55. C'est par le même principe qu'on rend raison du second cas : car quand on a multiplié 2045 par 36, le produit 73620 s'est trouvé cent fois plus petit que le véritable, parce que ce n'étoit pas par 36 qu'il falloit multiplier, mais par 3600 qui est cent fois plus grand que 36 ; il falloit donc rendre le produit 73620 cent fois plus grand ; & par consequent il a fallu y ajoûter à la fin les deux zeros du multiplicateur,

56. Il suit de-là que dans la multiplication composée, il faut écrire le dernier chiffre de chaque produit particulier, au rang du chiffre par lequel on multiplie ; par exemple, si le multiplicateur est 546, il faut mettre le dernier chiffre du troisiéme produit particulier au rang des centaines : car le multiplicateur qui a formé ce troisiéme produit, est le chiffre 5 qui signifie 500 ; par conséquent après avoir multiplié par

5, il faut ajoûter deux zeros au produit. Or, en écrivant le dernier chiffre au rang des centaines, on fait la même chose que si on ajoûtoit deux zeros au produit.

57. Le troisiéme cas se démontre aussi comme les deux premiers. Supposez, par exemple, qu'on veuille multiplier 340 par 400 : si on multiplioit les chiffres positifs du multiplicande par celui du multiplicateur, & qu'au produit 136, on ajoûtât seulement les deux zeros du multiplicateur, le nombre 13600 ne seroit le produit que de 34 par 400. Or, ce n'étoit pas seulement 34 qu'il falloit multiplier, c'étoit 340 qui est dix fois plus grand; par conséquent le produit 13600 est dix fois trop petit; il faudroit donc le rendre dix fois plus grand; & par conséquent mettre à la fin le zero qui est au dernier rang du multiplicande.

COROLLAIRE I.

58. Il suit du troisiéme cas que quand on multiplie un chiffre par un autre, il y a après le produit autant de rangs, qu'il y en a tant après le chiffre multiplié, qu'après celui du multiplicateur, par exemple si on multiplie 50000 par 300, il faut qu'il y ait, après le produit des chiffres positifs, autant de zeros qu'il y en a tant après 5 qu'après 3, c'est-à-dire six; ainsi le vrai produit de 50000 par 300 est 15000000.

Cela n'est pas seulement vrai lorsque les chiffres sont suivis d'un zero, comme dans l'exemple proposé; mais aussi quand ils sont suivis d'autres chiffres : supposez qu'on ait à multiplier 57902 par 364, il se trouvera dans le produit total six rangs après le produit partiel du 5 premier chiffre du multiplicande par le 3 du multiplicateur, puisque dans le multiplié le 5 signifie réellement 50000, & que dans le multiplicateur le 3 exprime aussi 300. Par la même raison le produit

partiel du troisiéme chiffre 9 par le second 6, sera aussi suivi de trois rangs dans le produit total, parce qu'il y en a deux dans le multiplié aprés 9, & un dans le multiplicateur aprés 6.

COROLLAIRE II.

59. Si on multiplioit le nombre 57902 par lui-même, le quarré particulier de chaque chiffre auroit aprés lui, dans le quarré total, le double de rangs qu'il y en a aprés ce chiffre dans le nombre: par exemple, le quarré particulier de 5 auroit le double de quatre, c'est-à-dire, huit rangs aprés lui dans le quarré total du nombre 57902, parce que 5 a quatre rangs aprés lui dans ce nombre. De même le quarré particulier de 7 auroit le double de 3, c'est-à-dire, six rangs aprés lui dans le quarré total du même nombre 57902, parce qu'il y a trois rangs aprés le 7 dans ce nombre; ainsi des autres. C'est une suite évidente du précédent corollaire; car le même nombre étant multiplicande & multiplicateur, il y a autant de rangs aprés le chiffre qu'on multiplie, qu'aprés celui qui sert de multiplcateur, puisque c'est le même chiffre du même nombre; ainsi dans l'exemple proposé, y ayant quatre rangs aprés le 5 consideré comme multiplicande, il y en a aussi quatre aprés ce même 5 consideré comme multiplicateur; par consequent il doit y avoir huit rangs dans le quarré total aprés le produit de 5 par 5, c'est-à-dire, le quarrè particulier de 5. C'est la même raison pour le 7 & les autres chiffres suivans.

COROLLAIRE III.

60. Le produit de deux nombres contient souvent autant de chiffres qu'il y en a tant au multiplicande qu'au multiplicateur, il en contient quelquefois un de

moins ; mais il ne peut jamais en contenir plus. Ainſi le produit qui vient de la multiplication de deux nombres dont l'un a trois chiffres, & l'autre deux, peut être compoſé de cinq chiffres, ou ſeulement de quatre, mais il ne peut en avoir ſix. Par exemple le produit de 999 par 99 a cinq chiffres : mais quoique le multiplicande & le multiplicateur contiennent les plus grands chiffres qu'il ſoit poſſible, le produit ne peut avoir ſix chiffres : car le produit de 999 par 99 eſt moindre que celui de 999 par 100. Or le produit de 999 par 100 eſt 99900 qui ne contient que cinq chiffres ; par conſéquent le produit de deux nombres dont l'un eſt compoſé de trois chiffres & l'autre de deux ne peut en contenir plus de cinq. Il eſt pareillement certain que le produit de deux nombres dont l'un a trois chiffres, & l'autre deux, peut n'en contenir que quatre : tels ſont les produits de 999 par 10, & de 345 par 26.

Nous n'avons parlé juſqu'à préſent que de la multiplication des nombres incomplexes ; nous ne traiterons de celle des nombres complexes qu'après la diviſion, parce que nous nous ſervirons de la diviſion pour trouver le produit de ces ſortes de nombres.

DE LA DIVISION.

61. Diviſer un nombre par un autre, c'eſt chercher combien de fois le ſecond eſt contenu dans le premier : par exemple, diviſer 18 par 6, c'eſt chercher combien de fois 6 eſt contenu dans 18. Pour faire cette opération, on dit : en 18 combien de fois 6, on trouve qu'il y eſt contenu trois fois ; ainſi 3 exprime combien de fois 6 eſt contenu dans 18. Il y a donc trois choſes à diſtinguer dans la diviſion, ſçavoir le *dividende*, le *diviſeur* & le *quotient*. Le dividende eſt le nombre à diviſer : le diviſeur eſt celui par lequel on diviſe ; & le quotient eſt le nombre qui marque com-

bien de fois le diviſeur eſt contenu dans le dividende : dans l'exemple propoſé, 18 eſt le dividende, 6 eſt le diviſeur, & 3 eſt le quotient.

On peut donc définir la diviſion, une opération par laquelle on trouve un nombre, qu'on appelle quotient, qui marque combien de fois le dividende contient le diviſeur : ſi on diviſe 30 par 5, on trouve pour quotient 6, qui marque combien de fois le dividende 30 contient le diviſeur 5, c'eſt-à-dire, ſix fois.

62. Il ſuit de cette définition, que dans la diviſion le dividende contient autant de fois le diviſeur que le quotient contient l'unité : dans l'exemple qu'on vient de propoſer, le dividende 30 contient le diviſeur autant de fois que le quotient 6 contient l'unité ; car le quotient qui marque toûjours combien de fois le dividende contient le diviſeur étant ici 6, le dividende 30 contient 6 fois le diviſeur 5 ; de même que le quotient 6 contient ſix fois 1.

63. On diſtingue deux ſortes de diviſions, la *ſimple* & la *compoſée*. La diviſion ſimple eſt celle dont le diviſeur ne contient qu'un ſeul chiffre. La diviſion compoſée eſt celle dont le diviſeur en contient pluſieurs. Nous parlerons d'abord de la ſimple, & enſuite de la compoſée.

Nous ſuppoſons qu'on ſçait diviſer tout nombre plus petit que 90 par les neuf chiffres poſitifs, 1, 2, 3, 4, &c. Pour cela il n'y a qu'à ſçavoir la Table de la multiplication : car ſi on connoît, par exemple, que 8 fois 6 font 48, on connoîtra par conſéquent que 6 eſt contenu huit fois dans 48. Il faut donc bien ſçavoir cette Table pour faire la diviſion ; c'eſt pourquoi ceux qui ne la ſçavent pas exactement par mémoire, doivent l'apprendre avant de commencer cette opération qui eſt la plus difficile des quatre.

DE LA DIVISION SIMPLE.

Pour faire la division, on écrit le diviseur à côté du dividende vers la droite, & on tire une ligne au-dessous de l'un & de l'autre, laquelle on coupe par un crochet que l'on met entre le dividende & le diviseur pour les séparer, comme on voit à la page suivante: & lorsqu'on fait la division, on place les chiffres du quotient sous le diviseur à mesure qu'on les trouve. On pourroit disposer autrement le diviseur & le quotient à l'égard du dividende; mais il est bon de s'accoûtumer à les disposer toûjours de la même maniere. Après ces préparations on observe les regles suivantes.

64. 1°. On prend le premier chiffre du dividende, c'est-à-dire, le plus à gauche, (car c'est de ce côté qu'on commence la division; au lieu que les trois premieres opérations se font en commençant vers la droite;) on prend, dis-je, le premier chiffre du dividende, & on considere combien de fois le diviseur y est contenu, pour écrire ensuite au quotient le caractere qui exprime combien de fois le diviseur est contenu dans le premier chiffre du dividende. Si le premier chiffre du nombre à diviser étoit plus petit que le diviseur, on prendroit les deux premiers, & on écriroit de même au quotient le caractere qui marqueroit combien de fois le diviseur est contenu dans ces deux premiers chiffres du dividende. Cette premiere opération s'appelle proprement la division.

65. 2°. On multiplie le diviseur par le chiffre qu'on vient d'écrire au quotient, pour en avoir le produit.

66. 3°. Enfin, quand on a trouvé ce produit, on le soustrait du premier, ou des deux premiers chiffres du dividende, si on a operé sur deux.

67. Après avoir fait la soustraction, on abbaisse le chiffre suivant du nombre à diviser à côté du reste, s'il y en a, & on opere sur ce reste augmenté du chif-

fre abbaissé, comme on a operé sur le premier, ou les deux premiers chiffres du nombre à diviser, y appliquant les trois regles que nous venons de prescrire : on continue toûjours de la même maniere jusqu'à ce qu'on ait operé sur tous les chiffres du dividende, après quoi la division est achevée.

68. Remarquez que si le diviseur n'étoit point contenu dans le chiffre sur lequel on opere, il faudroit mettre zero au quotient ; auquel cas la multiplication & la soustraction marquées par la seconde & la troisiéme regle deviendroient inutiles.

Tout cela s'éclaircira par des exemples.

EXEMPLE I.

Soit le nombre 9408 à diviser par 4 : après avoir placé le dividende & le diviseur, & tiré des lignes, comme nous l'avons marqué, je dis : en 9 combien de fois 4 ? 2 fois ; je mets donc 2 au quotient : ensuite, selon la seconde regle, je multiplie le diviseur 4 par 2, ce qui donne 8 : enfin je soustrais, par la troisiéme regle, ce produit 8 de 9, il reste 1 que j'écris sous 9 : voilà donc déja les trois regles qui ont été observées sur le premier caractere du nombre à diviser.

9408	4
14	2352
20	
08	
0	

J'abbaisse ensuite le 4 à côté du reste 1, & j'opere sur ces deux chiffres, comme j'ai fait sur le premier ; je dis donc : en 14 combien de fois 4 ? 3 fois ; je mets 3 au quotient à la suite du 2 : après quoi je multiplie 4 par 3, le produit est 12 que je soustrais de 14, le reste est 2 que j'écris sous le 4 du dividende.

J'abbaisse encore le chiffre suivant du dividende qui est zero que je mets à côté du second reste 2, ce qui fera 20 : auquel nombre j'applique les trois regles ; je dis donc : en 20 combien de fois 4 ? 5 fois ; je pose 5

au quotient, & je multiplie 4 par 5; le produit eſt 20 que je ſouſtrais de 20, il ne reſte rien.

Enfin j'abbaiſſe 8 ſur lequel je fais les mêmes opérations, en diſant : en 8 combien de fois 4 ? 2 fois ; je poſe 2 au quotient, & je multiplie 4 par 2, le produit eſt 8 que je ſouſtrais du 8 abbaiſſé, il ne reſte rien. Tous les chiffres du nombre à diviſer ayant été abbaiſſés, la diviſion eſt faite, & le quotient eſt 2352.

69. Les chiffres du dividende dans leſquels on cherche à chaque fois combien le diviſeur eſt contenu, s'appellent *membres* de la diviſion ou du dividende ; on peut les nommer auſſi *dividendes partiels* ; ainſi dans l'exemple propoſé 9 eſt le premier membre ou le premier dividende partiel, 14 eſt le ſecond, 20 le troiſiéme, & 8 le quatriéme.

REMARQUES.

I.

70. On doit prendre pour premier membre de la diviſion, un nombre qui ſoit au moins auſſi grand que le diviſeur ; c'eſt pourquoi ſi en prenant autant de chiffres dans le dividende qu'il y en a dans le diviſeur (c'eſt-à-dire, le premier lorſque la diviſion eſt ſimple, & les premiers quand elle eſt compoſée,) cela ne fait point une ſomme égale au diviſeur, il faut prendre un chiffre de plus pour premier membre : on en verra pluſieurs exemples dans la ſuite.

Pour avoir le ſecond membre, il faut abbaiſſer le chiffre qui ſuit celui ou ceux qui ont ſervi de premier membre pour le mettre à la ſuite du reſte de la premiere ſouſtraction ; & ce reſte, s'il y en a, augmenté du chiffre abbaiſſé ſera le ſecond membre de la diviſion. Dans l'exemple précedent après la premiere ſouſtraction on a deſcendu le 4 du dividende à côté du reſte 1 : ce qui a donné 14 pour le ſecond membre. On fait de même pour avoir chacun des autres membres, c'eſt-à-dire,

qu'on abbaiſſe le chiffre qui ſuit ceux qui ont déja ſervi, on l'abbaiſſe, dis-je, à côté du reſte de la ſouſtraction précedente, & ce reſte, s'il y en a, augmenté du chiffre abbaiſſé, donnera le membre cherché.

S'il ne reſtoit rien après la ſouſtraction faite ſur un des membres, alors le ſeul chiffre abbaiſſé feroit le membre ſuivant ; c'eſt ce qui eſt arrivé dans l'exemple précedent, dont le 8 ſeul a eſté le quatriéme membre, parce qu'il n'eſt rien reſté après la ſouſtraction du troiſiéme.

I I.

71. A meſure qu'on deſcend quelque chiffre, il eſt à propos de l'effacer par un petit trait oblique dans le nombre à diviſer, afin de ne point confondre ceux qui ont été abaiſſez avec les ſuivans, comme il pourroit arriver, ſur-tout quand il y a pluſieurs chiffres de ſuite du dividende qui ſont égaux. En faiſant la diviſion des exemples ſuivans, nous ne rappellerons pas cette remarque, lorſqu'il faudra en faire l'application, de peur de trop allonger le diſcours.

I I I.

72. Pour s'aſſurer ſi on ne s'eſt point trompé dans la diviſion, il faut, après l'avoir achevée, multiplier le diviſeur par le quotient, ou le quotient par le diviſeur, & ajoûter au produit le reſte que l'on a trouvé à la fin de la diviſion, s'il y en a ; la ſomme du produit & du reſte eſt égale au dividende, ſi la diviſion eſt bien faite ; s'il n'y a point de reſte, le produit ſeul doit être égal au dividende : ainſi dans l'exemple précedent, il faut multiplier le quotient 2352 par 4, & le produit 9408 étant égal au dividende, c'eſt une marque que l'opération eſt bien faite.

I V.

73. On ne peut jamais mettre plus de 9 au quotient, pour chacun des membres de la diviſion. On donnera dans la ſuite la raiſon des deux dernieres remarques.

La définition précedente & les quatre remarques ont lieu dans la division composée, comme dans la division simple.

Afin de faire mieux entendre l'application des regles de la division, nous distinguerons les differens membres, & nous appliquerons les trois regles à chacun de ces membres en particulier.

EXEMPLE II.

Soit le nombre 302045 à diviser par 6.

Premier Membre de la Division.

Voyant que le premier chiffre 3 du dividende est plus petit que le diviseur 6, je prends 30 pour premier membre selon la premiere remarque *; & je dis : en 30 combien de fois 6 ? 5 fois ; je pose donc 5 au quotient ; & je multiplie 6 par 5, le produit est 30, qui étant ôté du premier membre, il ne reste rien. * 70.

Second Membre.

J'abbaisse le 2 du dividende qui sera seul le second membre de la division, après quoi je dis : en 2 combien de fois 6 ? mais le diviseur n'étant pas contenu dans le dividende partiel qui est 2, j'écris 0 au quotient * : la multiplication du diviseur par 0, & la soustraction étant inutile, il restera 2. * 68.

Troisiéme Membre.

302045	6
20	50340
24	
(5	

Je transporte le chiffre suivant du dividende, qui est 0, à côté du reste 2 ; ce qui donnera 20 pour le troisiéme membre ; je dis ensuite : en 20 combien de fois 6 ? 3 fois ; je pose 3 au quotient, & je multiplie 6 par 3 : le produit 18 étant ôté de 20, il reste 2 qu'il faut écrire sous 0.

Quatriéme Membre.

Je descends le 4 du dividende à côté du reste 2 : ce qui fait 24 pour le quatriéme membre ; je dis donc : en 24 combien de fois 6 ? 4 fois : je pose 4 au quotient ; & ayant multiplié 6 par 4, je soustrais le produit 24 de ce quatriéme membre, il ne reste rien.

Cinquiéme Membre.

Enfin j'abbaisse le 5 du dividende qui fera seul le cinquiéme membre, n'y ayant point eu de reste du précedent ; je dis donc : en 5 combien de fois 6 ? le diviseur n'étant pas contenu dans ce membre, je mets
* 68. zero au quotient * ; mais la multiplication & la soustraction étant pour lors inutiles, il reste 5 du dividende qu'il faut séparer par un petit arc, & la division est achevée.

EXEMPLE III.

Soit le nombre 3780269 à diviser par 7. Nous ne mettons ce troisiéme exemple qu'à cause des deux zeros qu'il faut écrire de suite au quotient ; c'est pourquoi nous n'expliquerons que ce qui regarde ces deux zéros ; car on verra assez comment doit se pratiquer le reste de la division, après ce qui a été dit dans les exemples précedens.

3780269	{	7
28	{	540038
0026		
59.		
(3		

Dans cet exemple, après avoir mis le premier zero au quotient, on descend le 2 à la droite du zero du dividende, lequel zero avoit été abbaissé auparavant, & on cherche combien de fois le diviseur 7 est contenu dans le 2 qui est le quatriéme membre : mais comme le diviseur n'est point contenu dans ce membre, on met un second zero au quotient ; ensuite on abbaisse le 6 du dividende à côté du 2 ; ce qui

qui donne 26 pour le cinquiéme membre ; on cherche donc combien de fois le diviſeur eſt contenu dans 26 ; & comme il y eſt contenu 3 fois, on écrit 3 au quotient, & on fait tout le reſte comme dans les exemples précedens.

Nous n'avons pas écrit le produit du diviſeur par chacun des chiffres du quotient pour en faire la ſouſtraction : ainſi dans le ſecond exemple, après avoir mis au quotient le premier chiffre 5, on a multiplié le diviſeur 6 par 5 : ce qui a donné le produit 30 que l'on a ſouſtrait du premier membre 30, ſans l'avoir écrit au-deſſous de ce membre, comme on auroit pû faire : mais dans la diviſion compoſée nous écrirons toujours ces produits ſous les membres dont ils doivent être ſouſtraits, afin que l'on ſoit moins expoſé à faire des fautes de calcul dans la ſouſtraction : ce qui arriveroit plus facilement que dans la diviſion ſimple où les produits ſont fort petits, n'étant jamais compoſez de plus de deux chiffres.

Avant que de paſſer à la diviſion compoſée, il eſt à propos de refaire pluſieurs fois les exemples que l'on vient de donner, & ſur-tout le ſecond & le troiſiéme qui contiennent des zeros au quotient ; on doit auſſi ſe donner des exemples : & afin de voir ſi on ne ſe trompe point dans l'application des regles, il faut multiplier un nombre, tel qu'on voudra, par un ſeul caractere, & prenant le produit qui en viendra pour dividende, & le multiplicateur pour diviſeur, il doit venir au quotient le même nombre qui a ſervi de multiplicande ; ainſi il ſera facile de voir ſi on ſe trompe en faiſant la diviſion. On peut faire la même choſe pour la diviſion compoſée, pourvû que le multiplicateur contienne pluſieurs chiffres.

DE LA DIVISION COMPOSÉE.

Nous avons dit que lorſqu'il y a pluſieurs chiffres au

diviſeur, pour lors la diviſion étoit appellée compoſée.

74. On trouve les différens membres de cette diviſion
* 70. de la maniere qui a été expliquée *, & on applique ſur chacun les trois regles de la diviſion ſimple, c'eſt-à-dire, qu'il faut 1°. chercher combien de fois le diviſeur eſt contenu dans chaque membre de la diviſion, & écrire au quotient le caractere qui marque combien de fois le diviſeur entier eſt contenu dans le membre ſur lequel on opere; 2°. multiplier tout le diviſeur par le caractere qu'on vient d'écrire au quotient; 3°. ôter le produit de cette multiplication du dividende partiel. Nous allons faire des remarques & donner des exemples de la diviſion compoſée, qui feront concevoir comment ſe fait l'application de ces regles.

REMARQUES.

I.

75. Lorſqu'on veut faire une diviſion compoſée, il ne faut pas chercher combien de fois le diviſeur entier eſt contenu dans le membre de la diviſion ſur lequel on opere; cela demanderoit une trop grande étenduë d'eſprit: par exemple, ſi on veut diviſer 27605 par 84, il ne faut pas chercher combien de fois le diviſeur entier 84 eſt contenu dans 276 qui eſt le premier membre: mais concevant que le diviſeur eſt ſous le dividende partiel, (ſans l'y écrire effectivement) en ſorte que le dernier chiffre du diviſeur réponde au dernier chiffre de ce dividende partiel en cette maniere $\frac{276}{84}$; il faut voir combien de fois le premier chiffre du diviſeur eſt contenu dans celui ou ceux auſquels il répond: dans cet exemple, 8 répond à 27, parce que n'y ayant aucun chiffre du diviſeur avant 8, il eſt cenſé répondre non-ſeulement à 7 qui eſt préciſément au-deſſus, mais auſſi à 2 qui joint au 7 fait 27; on doit donc chercher

combien de fois 8 eſt contenu dans 27, en diſant : en 27 combien de fois 8 ?

II.

76. Après avoir trouvé combien de fois le premier chiffre du diviſeur eſt contenu dans le chiffre ou les chiffres auſquels il répond, il ne faut pas mettre d'abord au quotient le caractere qui exprime combien de fois le premier chiffre du diviſeur eſt contenu dans celui ou ceux auſquels il répond ; il faut auparavant faire l'épreuve. Or cette épreuve conſiſte à multiplier le diviſeur entier par le caractere qu'on vouloit mettre au quotient, & ſi le produit de cette multiplication n'eſt pas plus grand que le dividende partiel ; le chiffre éprouvé eſt bon, & doit être mis au quotient : dans l'exemple propoſé, après avoir trouvé que 8 eſt contenu 3 fois dans les chiffres correſpondans 27 ; il faut faire l'épreuve ; c'eſt-à-dire, multiplier le diviſeur entier 84 par 3, & le produit 252 n'étant pas plus grand que le premier membre 276, on doit mettre 3 au quotient : mais ſi le produit du diviſeur par le chiffre éprouvé 3, avoit été plus grand que le dividende partiel, il auroit fallu éprouver 2 moindre que 3 d'une unité ; & ſi en multipliant le diviſeur par 2, le produit eût encore été plus grand que le dividende partiel, il auroit fallu mettre au quotient 1 moindre que 2 d'une unité. En un mot, il faut diminuer toujours d'une unité le chiffre éprouvé, juſqu'à ce que le produit du diviſeur par le chiffre éprouvé ne ſoit pas plus grand que le membre ſur lequel on opere, afin que ce produit puiſſe en être ôté.

On doit écrire à part toutes les multiplications que l'on fait pour les épreuves ; par ce moyen les épreuves qu'on a faites pour les premiers chiffres du quotient, pourront ſervir pour les ſuivans.

III.

77. S'il arrivoit qu'en multipliant le diviſeur par 1, le produit ne pût être ôté du dividende partiel, ou ſi le diviſeur étoit plus grand que le dividende partiel, (ce qui revient au même,) ce ſeroit une marque qu'on ne pourroit mettre que zero au quotient pour ce membre, auquel cas on négligeroit la multiplication & la ſouſtraction, parce qu'elles ſeroient inutiles, comme on l'a déja remarqué pour la diviſion ſimple.

Ces trois remarques ſont pour tous les membres de la diviſion compoſée, excepté le premier ſur lequel la troiſiéme remarque n'a point d'application.

EXEMPLE I.

Soit le nombre 27605 à diviſer par 84.

Premier Membre.

27605	84
252	3
24	

Les deux premiers chiffres du dividende faiſant un nombre moindre que le diviſeur, je prends les trois premiers, ſçavoir 276 pour le premier membre, ſous lequel concevant le diviſeur comme il a été dit dans la premiere remarque ſur la diviſion compoſée *, je cherche combien de fois 8 eſt contenu dans les chiffres correſpondans 27; & voyant qu'il y eſt contenu 3 fois, je multiplie le diviſeur entier 84 par 3, le produit eſt 252, lequel étant moindre que le premier membre 276, je mets 3 au quotient. Voilà déja l'application de la premiere regle faite ſur le premier membre.

* 75.

Après avoir mis 3 au quotient, je devrois multiplier, ſelon la ſeconde regle, le diviſeur 84 par le chiffre 3 que j'ai mis au quotient; mais comme j'ai déja trouvé le produit en faiſant l'épreuve, j'écris ſimplement ce produit ſous le premier membre; en ſorte que le dernier chiffre du produit ſoit ſous le dernier chiffre du premier membre en cette maniere $\frac{276}{252}$.

Enfin j'applique la troisiéme regle en ôtant, selon la méthode ordinaire de la soustraction, le produit 252 du dividende partiel 276 ; cette soustraction étant faite ; le reste sera 24, & l'opération sera achevée sur le premier membre. On cherche ensuite le second sur lequel on opere de la même maniere, aussi-bien que sur les suivans, comme on le verra dans la suite.

Second Membre.

Le reste du premier membre est 24, à côté duquel j'abbaisse le chiffre suivant du dividende qui est 0 : ce qui donne 240 pour le second membre, sous lequel concevant le diviseur 84 dispoſé comme il faut *, je *75.
cherche combien de fois 8 est contenu dans 24, qui est le nombre auquel il répond : comme je vois qu'il y est contenu 3 fois, j'éprouve le 3 en multipliant le diviseur par 3, le produit 252 est plus grand que 240 : ainsi le 3 n'est pas bon. Je dois donc le diminuer d'une unité, il restera 2 qu'il faut aussi éprouver en multipliant le diviseur par 2. Or en faisant cette multiplication, je trouve le produit 168 qui est moindre que 240 ; par conséquent je dois mettre 2 au quotient à côté du 3 : ensuite la multiplication du diviseur par ce 2 étant toute faite, j'écris le produit 168 sous 240, les unitez sous les unitez, les dixaines sous les dixaines, &c. comme il faut toûjours l'observer ; & faisant ensuite la soustraction, je trouve le reste 72.

27605	84
252	328
240	
168	
725	
672	
(53	

Troisiéme Membre.

J'abbaisse le chiffre suivant du dividende, sçavoir 5, vis-à-vis du reste 72 ; ainsi le troisiéme & dernier membre est 725, sous lequel concevant le diviseur placé comme il faut *, je vois que le 8 répond à 72 ; *75.

je cherche donc combien de fois 8 est contenu dans 72, & voyant qu'il y est neuf fois, j'éprouve le 9, c'est-à-dire, que je multiplie le diviseur par 9; mais le produit 756 étant plus grand que 725, le 9 n'est pas bon; j'éprouve donc le 8 moindre d'une unité que 9: or le produit du diviseur par 8 est 672 moindre que 725; je pose donc 8 au quotient, & j'écris ce produit 672 sous 725 pour faire la soustraction, laquelle étant achevée, le reste est 53 que je sépare par un petit arc, afin de le distinguer des autres chiffres; ce qui étant fait, la division est entierement finie, parce qu'il n'y a plus de chiffre a abbaisser dans le dividende.

EXEMPLE II.

Soit le nombre 4797865 à diviser par 369.

Premier Membre.

Le diviseur n'étant pas plus grand que les trois premiers chiffres du dividende, sçavoir 479, ce nombre est le premier membre de la division, sous lequel concevant le diviseur en cette maniere $\frac{479}{369}$, le 3 du diviseur répondra au 4 du dividende partiel; je dis donc: en 4 combien de fois 3? une fois, j'écris 1 au quotient, parce que je vois que le produit du diviseur par 1 étant égal au diviseur même, n'est pas plus grand que 479: ensuite je mets le produit du diviseur par 1, c'est-à-dire, 369 sous le premier membre 479, les unitez sous les unitez, &c. après quoi je fais la soustraction qui me donne pour reste 110.

```
4797865 { 369
------- { -----
369     { 13002
-------
1107
1107
-------
00865
  738
-------
 (127
```

Second Membre.

Au reste 110 je joins le chiffre suivant du dividende, sçavoir 7, en l'abbaissant à côté de 110, ce qui fait

1107 pour second membre, sous lequel concevant le diviseur placé comme il faut *, le premier chiffre 3 du diviseur répondra sous 11; je dis donc : en 11 combien de fois 3 ? il y est 3 fois; c'est pourquoi j'éprouve le 3, en multipliant le diviseur par 3 : le produit est 1107, lequel n'étant pas plus grand que le dividende partiel; je pose 3 au quotient, & j'écris le produit 1107 sous le dividende partiel, pour faire la soustraction, laquelle étant achevée il ne reste rien. * 75.

Troisiéme Membre.

J'abbaisse le 8 qui est sous le troisiéme membre, parce qu'il n'est rien resté du second. Ce troisiéme membre étant plus petit que le diviseur, je dois mettre o au quotient; ainsi la multiplication & la soustraction sont inutiles, & par conséquent le reste du troisiéme dividende partiel est 8.

Quatriéme Membre.

Je descends le chiffre suivant du dividende, sçavoir 6, vis-à-vis du reste 8 : ce qui donne 86 pour le quatriéme membre; lequel étant encore plus petit que le diviseur, je mets un second o au quotient, & le reste de ce membre est 86.

Cinquiéme Membre.

Enfin ayant abbaissé le dernier chiffre du dividende qui est 5 à côté du reste 86, il vient 865 pour cinquiéme & dernier membre, sous lequel concevant le diviseur placé comme il faut, le 3 du diviseur répondra au 8; je dis donc : en 8 combien de fois 3 ? 2 fois; ainsi je multiplie le diviseur par 2, le produit est 738 qui étant moindre que 865, je pose 2 au quotient, & j'écris le produit 738 sous 865 pour faire la soustraction, après laquelle il reste 127 que je sépare par un petit arc, & la division est achevée.

Voicy encore deux exemples de la diviſion compoſée, que nous donnons ſans nous arrêter à les expliquer comme nous avons fait les précedens.

EXEMPLE III.

```
2569472 } 2953          Preuve de        2953
-------   ----          cette divi-       870
23624   } 870           ſion.          -------
-----                                     0000
 20707                                  20671
 20671                                 23624
  (362 reſte                              362 reſte
                                       ---------
                                       2569472
```

EXEMPLE IV.

```
28125074880 } 3906        Preuve de        3906
-----------   -------     cette divi-   7200480
27342       } 7200480     ſion.         ---
-----                                      0000
 7830                                     31248
 7812                                    15624
 ----                                     0000
 0018748                                 0000
   15624                                7812
   -----                               27342
   31248                             -----------
   31248                             28125074880
   -----
     000
```

REMARQUES.

I.

78. Si on appercevoit qu'après avoir fait la ſouſtraction, le reſte fût plus grand ou égal au diviſeur, ce ſeroit une marque que le chiffre qu'on vient de mettre au quotient ou quelqu'un des precedents ſeroit trop petit; puiſque le diviſeur ſeroit contenu dans le membre dont on viendroit de faire la ſouſtraction,

au moins une fois de plus qu'il ne seroit marqué par ce chiffre que l'on viendroit d'écrire au quotient : ainsi après la soustraction faite sur le second membre du premier exemple de la division composée, si le reste avoit été plus grand ou égal au diviseur 84, alors le 2 qu'on a mis au quotient pour ce membre auroit été trop petit.

II.

79. Chaque membre de la division fournissant un chiffre au quotient, il est visible qu'il doit y avoir autant de chiffres au quotient, qu'il y a de membres dans la division. Or il est facile de voir tout d'un coup, combien il y aura de membres dans la division, puisqu'il y en a autant & un de plus qu'il reste de chiffres dans le dividende après le premier membre : dans l'exemple cité à la remarque précedente, il étoit aisé de voir qu'il n'y auroit que trois membres en divisant 27605 par 84, & par conséquent qu'il n'y auroit que trois chiffres au quotient ; parce qu'il ne restoit que deux caracteres au dividende après le premier membre 276.

III.

80. Quand il n'y a point de reste après la derniere soustraction, c'est une marque que le diviseur est contenu exactement autant de fois dans le dividende qu'il y a d'unitez dans le quotient : mais s'il y a un reste, pour lors le dividende contient le diviseur autant de fois qu'il y a d'unitez dans le quotient, & il contient de plus le reste ; en sorte que si on retranchoit ce reste du dividende, le diviseur y seroit contenu justement autant de fois qu'il y a d'unitez au quotient.

On fait du reste qu'on trouve après la division une fraction dont ce reste est le numérateur, & le diviseur est le dénominateur : comme dans le premier exemple ci-dessus, ayant trouvé pour reste 53, on en fait la fraction $\frac{53}{84}$, laquelle on met à côté du quotient en entier de cette maniere, 328 $\frac{53}{84}$, ce qui marque que

le quotient de 27605 divisé par 84, eſt 328 & de plus la fraction $\frac{53}{84}$.

IV.

81. On ne peut jamais mettre plus de 9 au quotient pour un des membres du dividende. Nous allons le démontrer à l'égard du premier membre, & nous ferons voir enſuite que l'on peut appliquer la même démonſtration aux ſuivans.

Ou bien il y a autant de chiffres au premier membre qu'il y en a au diviſeur, ou il y en a un de plus. Or dans l'un & l'autre cas on ne peut mettre plus de 9 au quotient; ſuppoſons d'abord qu'il y a autant de chiffres dans le premier membre qu'il y en a au diviſeur; par exemple, trois à chacun; enſorte que les trois du premier membre ſoient les plus grands qu'il ſoit poſſible, & que les trois du diviſeur ſoient au contraire les plus petits que l'on puiſſe, afin que le diviſeur ſoit contenu plus de fois dans le premier membre: que ce premier membre ſoit donc 999 & le diviſeur 100 : il eſt certain que 100 n'eſt point contenu dix fois dans 999; car afin que 100 fût contenu dix fois dans 999, il faudroit que ce nombre 999 fût dix fois plus grand que 100, ce qui n'eſt pas, puiſque pour rendre un nombre dix fois plus grand qu'il n'eſt, il n'y a qu'à mettre un o après ce nombre. Or en mettant un o après 100, il vient 1000 qui eſt plus grand que 999; donc 999 n'eſt pas dix fois plus grand que 100; & par conſéquent 100 n'eſt pas contenu dix fois dans 999, on ne peut donc mettre plus de 9 au quotient, en diviſant 999 par 100.

De même s'il y avoit un chiffre de moins dans le diviſeur que dans le dividende partiel; par exemple, ſi le diviſeur étoit 625, & le premier membre 6249 (ce premier membre eſt le plus grand qu'il ſoit poſſible par rapport au diviſeur, puiſque ſi on l'augmentoit d'une unité, la ſomme qui en réſulteroit, ſçavoir 6250, ne

pourroit plus être prise pour premier membre, mais seulement 625 égal au diviseur,) dans ce cas le diviseur ne seroit pas contenu dix fois dans le dividende partiel, puisqu'en rendant ce diviseur dix fois plus grand, c'est-à-dire, en le multipliant par 10, le produit 6250 est plus grand que le premier membre 6249; on ne peut donc, même dans ce cas, mettre plus de 9 au quotient.

Ce que l'on vient de dire pour le premier membre de la division, doit s'entendre également de tous les autres, parce que le reste qui se trouve après chaque soustraction, étant toujours plus petit que le diviseur, il est impossible que ce reste augmenté du chiffre qu'on abbaisse, contienne dix fois le diviseur.

Ces quatre remarques conviennent à la division simple, comme à la division composée.

82. Entre plusieurs manieres de faire la division composée, nous avons choisi celle qui vient d'être expliquée, parce qu'elle est plus facile à entendre, & que d'ailleurs elle paroît moins sujette aux fautes de calcul que les autres : ce qui est d'une grande conséquence. Au reste, lorsque le quotient ne doit être composé qu'environ de 3 ou 4 caracteres, il seroit plus court de ne faire l'épreuve que par la pensée, & de commencer la multiplication du diviseur vers la gauche, en faisant la soustraction en même tems sans rien écrire : la soustraction se fait de la même maniere que pour la preuve de l'addition. On va appliquer cette méthode sur un exemple.

Si je veux diviser 843067 par 2965, je dis : en 8 combien de fois 2 ? il y est 4 fois ; j'éprouve donc 4 en commençant à multiplier le diviseur vers la gauche, & en faisant en même tems la soustraction de la maniere suivante : 4 fois 2 font 8 ; j'ôte ce produit 8 du premier chiffre du dividende auquel répond le 2 du diviseur, & il ne reste rien ; je multiplie ensuite le

9 du diviſeur par 4 : mais le produit ne pouvant être ôté du 4 du dividende, il eſt viſible que ce chiffre éprouvé, ſçavoir 4, n'eſt pas bon ; j'éprouve donc le 3 de la même maniere, & je dis : 3 fois 2 font 6, j'ôte 6 de 8, il reſte 2 qu'il faut joindre par la penſée avec le 4 ſuivant du premier membre, ce qui fait 24 : enſuite je dis : 3 fois 9 font 27 que je ne puis ôter de 24, ainſi le chiffre 3 n'eſt pas encore bon. J'éprouve donc le 2 en diſant : 2 fois 2 font 4 que j'ôte de 8, il reſte 4 qu'il faut joindre par la penſée avec le 4 ſuivant, & la ſomme eſt 44 : Après cela je multiplie 9 par 2, & j'ôte le produit 18 de 44 ; & voyant qu'il reſte plus de 9, je ſuis aſſeuré que 2 eſt bon, c'eſt pourquoi je fais la multiplication du diviſeur par 2 à l'ordinaire, en commençant à la droite, & en écrivant le produit ; après quoi je fais la ſouſtraction & j'écris le reſte, comme il a été pratiqué dans la méthode dont on s'eſt ſervi ci-deſſus.

843067	2965
5930	284
25006	
23720	
12867	
11860	
1007	

La ſouſtraction étant faite, & le chiffre ſuivant du dividende étant abbaiſſé, le ſecond membre eſt 25006 ſur lequel je fais l'épreuve comme ſur le premier : je dis donc : en 25 combien de fois 2 ? on ne peut mettre que 9 ; ainſi j'éprouve 9 en diſant : 9 fois 2 font 18 que j'ôte de 25, il reſte 7, je joins par la penſée le reſte 7 au zero ſuivant du ſecond membre ; ce qui fait 70, après quoi je multiplie le 9 du diviſeur par le 9 éprouvé : mais le produit ne pouvant être ôté de 70 ; je conclus que le 9 n'eſt pas bon. J'éprouve donc le 8 en diſant : 8 fois 2 font 16, que j'ôte de 25, il reſte 9 ; ainſi je ſuis aſſuré que le chiffre éprouvé eſt bon ; c'eſt pourquoi je multiplie le diviſeur entier par 8, & j'écris le produit ; je fais enſuite la ſouſtraction en écri-

vant auſſi le reſte. On fera l'épreuve de la même maniere ſur le troiſiéme membre de la diviſion.

PREUVE DE LA DIVISION.

83. La preuve de la diviſion ſe fait, comme on l'a remarqué, en multipliant le diviſeur par le quotient, ou le quotient par le diviſeur : ce qui donne un produit égal au dividende, lorſque la diviſion ſe fait exactement, c'eſt-à-dire, lorſqu'il n'y a point de reſte après la derniere ſouſtraction : voici la raiſon pour laquelle le produit du diviſeur par le quotient doit être égal au dividende. Nous avons dit que le quotient marquoit combien de fois le diviſeur eſt contenu dans le dividende : par exemple, 100 étant diviſé par 4, le quotient 25 fait voir que le diviſeur 4 eſt contenu 25 fois dans 100 ; par conſéquent en prenant le diviſeur autant de fois qu'il eſt marqué par le quotient, l'on doit avoir un nombre égal au dividende. Or prendre le diviſeur autant de fois qu'il eſt marqué par le quotient, c'eſt multiplier le diviſeur par le quotient ; par conſéquent le produit du diviſeur par le quotient, ou du quotient par le diviſeur eſt égal au dividende.

84. Il eſt facile de voir à préſent qu'on peut ſe ſervir de la diviſion pour preuve de la multiplication : car le produit contenant le multiplicande autant de fois qu'il eſt marqué par le multiplicateur, il eſt évident que ſi on diviſe le produit par le multiplicande, le quotient ſera le multiplicateur : & réciproquement ſi on diviſe le produit par le multiplicateur, le quotient ſera le multiplicande.

85. Puiſque le dividende eſt égal au produit du quotient par le diviſeur, il s'enſuit que le quotient eſt contenu autant de fois dans le dividende qu'il eſt marqué par le diviſeur : c'eſt pourquoi de même que le quotient exprime combien de fois le diviſeur eſt contenu dans le dividende ; pareillement le diviſeur exprime combien de fois le quotient eſt contenu dans le

dividende; ainſi on peut définir la diviſion, une opération par laquelle on trouve un nombre (c'eſt le quotient) qui eſt contenu dans le dividende autant de fois qu'il eſt marqué par le diviſeur : par exemple, ſi on diviſe 100 par 4, on trouvera 25 qui eſt contenu 4 fois dans 100.

86. Il eſt donc clair que quand le diviſeur eſt plus grand que l'unité, pour lors le quotient eſt plus petit que le dividende autant de fois qu'il eſt marqué par le diviſeur : ainſi en diviſant 100 par 4, on trouve pour quotient le nombre 25 qui eſt quatre fois plus petit que 100, ou ce qui revient au même, qui n'eſt que la quatriéme partie de 100.

On peut voir à préſent d'une maniere évidente que la multiplication eſt oppoſée à la diviſion. Car lorſqu'on multiplie un nombre comme 100 par 4, on trouve un
* 36. autre nombre quatre fois plus grand * que le premier. Au contraire ſi on diviſe 100 par 4, on trouve un nombre quatre fois plus petit que 100, ou qui n'eſt que la quatriéme partie de 100.

On peut auſſi appercevoir aiſément la raiſon de l'uſage que l'on fait de la diviſion : par exemple, ſi on veut partager 100000 liv. également à cinq perſonnes, on diviſe 100000 par 5, & le quotient 20000 eſt la cinquiéme partie de 100000, parce que le diviſeur 5 marque que le quotient 20000 eſt contenu cinq fois dans 100000; il faut donc donner 20000 liv. à chacune des cinq perſonnes.

87. Nous avons ſuppoſé, en donnant la raiſon de la preuve de la diviſion, que cette opération, c'eſt-à-dire, la diviſion ſe faiſoit exactement ou ſans reſte : mais s'il y avoit un reſte, il eſt clair qu'en l'ajoûtant au produit du diviſeur par le quotient, la ſomme qui en réſulteroit ſeroit égale au dividende : par exemple, ſi on diviſe 103 par 4, le quotient ſera 25, & il y aura 3 de reſte. Or ſi on multiplie le quotient par le diviſeur, & qu'au produit 100 on ajoûte le reſte 3, la ſomme ſera né-

ceſſairement égale au dividende : car puiſqu'il eſt reſté 3 après la diviſion, c'eſt une marque que ſi le dividende avoit été diminué de 3, la diviſion ſe feroit ſans reſte, ainſi le produit du quotient par le diviſeur auroit été égal au dividende 103 diminué de 3, comme on vient de le prouver *; par conſéquent ſi on ajoûte 3 à ce produit, la ſomme ſera égale au dividende entier. * 83.

88. Quoiqu'on puiſſe également, pour faire la preuve de la diviſion, multiplier le quotient par le diviſeur, ou le diviſeur par le quotient, cependant il eſt pour l'ordinaire plus commode dans la diviſion compoſée, de faire la preuve en multipliant le diviſeur par le quotient; parce qu'il n'y a qu'à écrire les produits particuliers du diviſeur par les differens chiffres du quotient, leſquels produits ont été trouvez en faiſant la diviſion, comme on peut le voir dans le troiſiéme & quatriéme exemple de la diviſion compoſée dont on a donné la preuve.

DÉMONSTRATION DE LA DIVISION.

89. Diviſer un nombre par un autre, c'eſt en chercher un troiſiéme, qu'on nomme quotient, qui exprime combien de fois le diviſeur eſt contenu dans le dividende. Or en ſuivant les regles de la diviſion, on trouve pour quotient un nombre qui exprime combien de fois le diviſeur eſt contenu dans le dividende. : car pour voir combien de fois un nombre eſt contenu dans un autre, il n'y a qu'à ſçavoir combien de fois le premier peut être ôté du ſecond. Or en ſuivant les regles de la diviſion, on trouve pour quotient un nombre qui exprime combien de fois le diviſeur peut être ſouſtrait du dividende, puiſqu'à chaque chiffre qu'on écrit au quotient, on doit multiplier le diviſeur par ce chiffre, pour en ſouſtraire le produit du dividende : par exemple, ſi on diviſe 100 par 4, il ſe trouvera à la fin de l'opération, qu'on aura multiplié 4 par 25, & qu'on aura ſouſtrait

le produit, c'est-à-dire, 25 fois 4, de 100; & par conséquent le diviseur est retranché du dividende autant de fois qu'il y a d'unitez dans le quotient : d'ailleurs le diviseur est retranché du dividende autant de fois qu'il y est contenu ; puisque selon les regles de la division, le reste, s'il y en a, est toujours moindre que le diviseur. Donc le quotient exprime combien de fois le diviseur peut être ôté du dividende ; ainsi il marque combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende. Ce qu'il falloit démontrer.

90. Les commençans pourroient être embarassez pour comprendre comment dans la pratique de la division, le diviseur est ôté du dividende autant de fois qu'il est marqué par le quotient, supposé par exemple, que le dividende soit 4578 & le diviseur 6, le quotient sera 763. Or il ne paroît pas d'abord qu'en suivant les regles de la division, le diviseur 6 ait été ôté du dividende 763 fois, parce que pour le premier membre de la division, on n'a multiplié le diviseur 6 que par 7, après quoi on a ôté le produit 42, c'est-à-dire, 7 fois 6, du dividende : pour le second membre on n'a soustrait le diviseur 6 que 6 fois du dividende, ou ce qui est la même chose, le produit du diviseur par le second chiffre 6 du quotient ; enfin pour le troisiéme membre on a encore ôté le diviseur 3 fois du dividende : on a donc ôté le diviseur du dividende seulement 16 fois ; sçavoir, 7 fois pour le premier membre, 6 fois pour le second, 3 fois pour le troisiéme ; ce qui fait en tout 16 & non pas 763.

Pour faire évanoüir cette difficulté, il faut considérer de quelle maniere se fait la soustraction dans la division. Quand pour le premier membre on a ôté du dividende le produit de 6 par 7, c'est-à-dire 42, on a fait comme si on avoit voulu soustraire 4200 produit de 6 par 700, puisque pour soustraire 4200 de 4578, il faudroit disposer ces deux nombres ; en sorte que 42 répondît

répondît à 45, & pour lors on trouveroit pour reste 378 qui est le même nombre qui est resté du dividende entier après la premiere soustraction; ainsi par cette soustraction on a ôté 700 fois le diviseur 6 du dividende: de même par la seconde soustraction de la division on a ôté du dividende le produit du diviseur 6 par 60 qui est 360; enfin par la troisiéme soustraction on a ôté du dividende qui restoit, 3 fois le diviseur, c'est-à-dire, le produit de 6 par 3; il est donc certain que le diviseur a été ôté du dividende, en faisant la division, 1°. 700 fois, 2°. 60 fois, 3°. 3 fois; ce qui fait en tout 763 fois.

91. Après ce que nous venons de dire, il est clair que la division n'est qu'une espece de soustraction par laquelle on ôte le diviseur du dividende autant de fois qu'il est marqué par le quotient.

92. C'est par la division qu'on réduit une somme de petites especes à de plus grandes: ce qui se fait en divisant la somme des petites especes par le nombre qui exprime combien la grande espece contient de fois la petite: par exemple, pour réduire une somme de deniers en sols, il faut diviser le nombre des deniers par 12, parce qu'un sol vaut 12 deniers, & le quotient sera le nombre des sols contenus dans la somme des deniers.

La raison de cette pratique est que le nombre de sols que vaut la somme des deniers, est 12 fois plus petit que le nombre des deniers, puisqu'il faut 12 deniers pour faire un sol; il ne s'agit donc pour réduire les deniers en sols, que de trouver un nombre qui ne soit que la douziéme partie de celui des deniers. Or en divisant le nombre des deniers par 12, on trouve pour quotient un nombre qui n'est que la douziéme partie de celui des deniers. * Donc ce quotient marquera le nombre des sols contenus dans la somme des deniers. * 86.

Nous allons donner plusieurs exemples de réduction des petites especes aux plus grandes.

Combien 546 deniers valent-ils de sols ? il faut diviser 546 par 12, le quotient 45 & le reste 6, font voir que 546 deniers valent 45 sols 6 deniers.

Combien 720 pieds en longueur valent-ils de toises ? il faut diviser 720 par le diviseur 6 qui marque combien de fois le pied est contenu dans la toise, le quotient 120 fait connoître que 720 pieds contiennent 120 toises.

Combien 50 onces d'argent valent-elles de marcs ? Il faut diviser 50 par 8, qui marque combien il y a d'onces au marc ; le quotient 6 & le reste 2 font connoître qu'il y a 6 marcs 2 onces dans cinquante onces.

MANIERE ABREGE'E de faire la division en certains cas.

Il y a des occasions où l'on peut faire la division plus facilement qu'à l'ordinaire : il est bon de ne pas ignorer quand cela se peut faire.

93. 1°. Lorsque le diviseur est composé de l'unité suivie de plusieurs zeros, s'il y a autant de zeros à la fin du dividende que dans le diviseur, pour lors, afin d'avoir le quotient, il n'y a qu'à retrancher autant de zeros de la fin du dividende qu'il y en a dans le diviseur, & le reste est le quotient de la division : par exemple, pour diviser 2475000 par 1000, comme il y a trois zeros dans le diviseur, il faut retrancher les trois zeros qui sont à la fin du dividende, le reste 2475 est le quotient de la division.

Autre exemple : le nombre 624000 étant divisé par 100, le quotient est 6240.

Voici la raison de cet abregé appliquée au premier exemple. Diviser un nombre par 1000, c'est chercher la milliéme partie de ce nombre, ou bien, ce qui est la même chose, c'est en chercher un qui soit mille fois

plus petit. * Or en retranchant trois zeros qui sont à la fin du dividende, on le rend mille fois plus petit, comme il paroît par ce qui a été dit sur la maniere abbregée de faire la multiplication * ; par consequent ce qui reste du dividende, après en avoir retranché les trois zeros qui sont à la fin, est le quotient de la division. * 86. * 53.

Le diviseur étant toûjours composé de l'unité suivie de plusieurs zeros, si le dividende avoit des chiffres positifs à la fin, on pourroit aussi retrancher autant de caracteres de la fin du dividende, qu'il y auroit de zeros dans le diviseur, & le quotient seroit encore le reste du dividende, auquel il faudroit ajoûter une fraction dont le numérateur seroit les chiffres qu'on auroit retranchez du dividende, & le dénominateur le diviseur. Exemple, si on divise 2475894 par 1000, le quotient sera $2475 \frac{894}{1000}$: c'est une suite necessaire de ce que l'on vient de dire.

94. 2°. Lorsqu'on veut diviser un nombre par 2, il faut prendre la moitié de chaque caractere de ce nombre : ce qui est plûtôt fait que d'observer les regles ordinaires de la division.

Soit, par exemple, le nombre 65207 à diviser par 2. Au lieu de suivre la regle générale, je dis : la moitié de 6 est 3 que j'écris au-dessous de 6 ; après je dis : la moitié de 4 c'est 2 que je pose sous 5 ; j'ai dit exprès la moitié de 4 quoiqu'il y ait 5, parce que cinq étant un nombre impair, dont par consequent on ne peut prendre la moitié, il a fallu rejetter une unité au rang suivant où elle vaudra 10 * ; c'est pourquoi je dirai au troisiéme rang : 10 & 2 qui se trouvoient déja à ce rang font 12, dont la moitié est 6 que je pose sous 2 ; ensuite je dis : la moitié de 0 c'est 0 que j'écris au-dessous. Enfin la moitié de 6 (je prens 6 au lieu de 7 qui est impair) c'est 3 que j'é- * 4.

65207
$32603 + \frac{1}{2}$

cris encore ſous 7, & comme il reſte 1 à diviſer par 2, il y aura une fraction dont 1 ſera le numerateur & 2 le dénominateur.

Voici encore deux	14050416	130407020
autres exemples que	7025208	65203510

nous donnons ſans les expliquer comme les précedents.

On peut ſe ſervir de la même méthode lorſqu'il s'agit de diviſer un nombre par 3; mais au lieu de prendre la moitié de chaque chiffre du nombre, il en faut prendre le tiers, comme on le peut voir dans l'exemple ſuivant, où il s'agit de diviſer 98104 par 3.

Je dis donc, le tiers de 9 eſt 3 que	98104
j'écris ſous 9 : enſuite je prends le tiers	$32701+\frac{1}{3}$

de 6 au lieu de 8, c'eſt 2 que j'écris ſous 8. On remarquera que je n'ai pris que le tiers de 6, parce que je ne pouvois prendre le tiers de 8 non plus que de 7; c'eſt pourquoi j'ai rejetté deux unitez du 8 au troiſiéme rang où elles vaudront 20; je dis donc : 20 & 1 qui ſe trouve à ce rang font 21, dont le tiers eſt 7 que je poſe ſous 1 : après cela je dis : le tiers de 0 c'eſt 0 que j'écris au-deſſous : enfin le tiers de 3, au lieu de 4, c'eſt 1 que je mets ſous 4; mais y ayant une unité de reſte, il y aura une fraction dont 1 ſera le numérateur & 3 le dénominateur. Le quotient de 98104 diviſé par 3 eſt donc $32701+\frac{1}{3}$.

Voici deux autres	250805	150402600
nombres dont on a	$83601+\frac{2}{3}$	50134200

pris le tiers ou qu'on a diviſés par 3 par la même méthode.

On peut encore ſe ſervir de la même méthode pour diviſer par 4, 5, 6, &c. mais elle devient plus difficile à meſure que le diviſeur augmente.

Il eſt inutile de s'arrêter pour démontrer cette méthode, étant aſſez évident qu'en prenant la moitié de

chaque chiffre d'un nombre, on a la moitié de ce nombre : c'eſt la même raiſon quand il s'agit du tiers.

95. On tire de-là une maniere fort courte de réduire les ſols en livres : elle conſiſte à retrancher le dernier caractere du nombre qui marque les ſols ; & à prendre enſuite la moitié du reſte ſuivant la méthode qu'on vient d'enſeigner.

Soit par exemple, 617409	61740 | 9 ſ.
ſols à réduire en livres, il faut	30870 liv. 9 ſ.

retrancher le dernier chiffre 9 qui marque les unitez de ſols, & prendre la moitié du reſte : cette moitié eſt 30870 : ainſi 617409 ſols valent 30870 liv. 9 ſ. on ajoûte 9 ſ. à cauſe du 9 qu'on a retranché.

Second exemple, dans lequel	41047 | 8 ſ.
l'avant-dernier chiffre 7 étant	20523 liv. 18 ſ.

impair, il reſte une unité qu'il faut joindre avec le chiffre retranché, en la mettant avant ce chiffre ; parce que c'eſt une dixaine de ſols.

Voici encore deux	460134 | 0 ſ.	61405 | 0 ſ.
ſommes de ſols à ré-	230067 liv.	30702 l. 10 ſ.

duire en livres.

La raiſon de cette maniere d'opérer vient de ce que le nombre de livres contenu dans une ſomme de ſols, eſt 20 fois plus petit que le nombre de ſols ; ainſi il ne s'agit que de prendre la vingtiéme partie du nombre de ſols. Or ſi le dernier caractere eſt un zero, en le retranchant, le reſte eſt la dixiéme partie de ce nombre ; par conſéquent en prenant la moitié de ce reſte, on aura la vingtiéme partie du nombre de ſols ; donc cette moitié exprime le nombre de livres que renferme la ſomme des ſols.

Si au lieu de ſuppoſer que le dernier caractere du nombre des ſols eſt un zero, il ſe trouve que c'eſt un chiffre poſitif, tel que 9, comme dans le premier exemple ; il eſt viſible que le nombre eſt plus grand de 9 ſols, que s'il y avoit un zero à la place du 9 ; par

conséquent outre les livres marquées par la moitié du reste, il contient encore 9 sols de plus.

96. Nous ajoûterons ici une pratique fort commode pour prendre la dixiéme partie d'une somme de livres. Il faut retrancher, c'est-à-dire, effacer le dernier chiffre du nombre qui exprime la somme, & doubler le chiffre retranché : pour lors le nombre qui reste après le retranchement marquera des livres, & le double du chiffre retranché exprimera des sols. Or le nombre des livres qui reste joint aux sols est précisément le dixiéme de la somme des liv. Exemples. Le dixiéme de 504723 liv. est 50472. liv. 6 sols. Le dixiéme de 4978. liv. est 497 liv. 16 sols. Le dixiéme de 4970 est 497 liv. il n'y a point de sols, parce que le double de zero n'est rien.

Il est aisé d'appercevoir que pour avoir le dixiéme de 4970 liv. il faut seulement effacer le zero qui est à la fin : car en effaçant le zero, le nombre restant 497
* 93. est le quotient de 4970 divisé par 10 * : or le quotient de 4970 divisé par 10 est précisément la dixiéme partie
* 86. de 4970 *. Donc 497 liv. est le dixiéme de 4970 liv. ainsi quand le dernier chiffre d'un nombre est un zero, ce qui reste après avoir effacé le zero est le dixiéme du nombre proposé.

Cela posé, je dis que le dixiéme de 4978 liv. est 497 liv 16 s. plus grande de 16 s. que celui de 4970. La raison en est que 4978. l. est plus grand que 4970 l. seulement de 8 liv. Or le dixiéme de 8 liv. est 16 sols, puisque le dixiéme de chaque livre est 2 sols, par conséquent lorsque le dernier chiffre d'un nombre qui marque des livres est positif, il faut prendre deux sols pour chaque livre marquée par ce dernier chiffre, c'est-à-dire, qu'il faut doubler ce chiffre, & il désignera les sols qui joints au nombre des livres restant, font le dixiéme de la somme proposée.

DE LA MULTIPLICATION des nombres complexes.

Nous avons remis à traiter de la multiplication des nombres complexes après la division, parce que pour faire cette multiplication, il faut se servir de la division, comme on le verra dans la suite.

Les nombres complexes sont ceux qui contiennent des quantitez de differentes especes : tel est le nombre suivant, 40 liv. 15 sols 6 den. & celui-ci 26 toises 8 pieds 10 pouces. Nous allons donner la méthode de multiplier ces nombres l'un par l'autre après la remarque suivante.

97. Lorsqu'on cherche le prix d'une marchandise par la multiplication, on doit toujours regarder comme le multiplicande, celui des deux nombres qui contient des quantitez semblables à celles du produit : par exemple, si on cherche le prix de douze aunes de drap à 15. liv. l'aune, & qu'on multiplie les deux nombres 12 & 15 l'un par l'autre, on doit regarder 15 livres comme le multiplicande ; parce que le produit qu'on cherche exprimera des livres, & l'autre nombre, 12 aunes, est le multiplicateur ; car lorsqu'on cherche le prix de 12 aunes à 15 liv. chacune, il est évident qu'il faut prendre 12 fois 15 livres, c'est-à-dire, multiplier 15 livres par 12, & par consequent les 15 liv. sont le multiplicande, & le nombre 12 est le multiplicateur. Souvent on s'énonce, comme si le nombre qui marque le prix étoit le multiplicateur : mais on doit toujours le concevoir comme étant le multiplié.

Pour ce qui est du multiplicateur, il faut toujours le concevoir comme un nombre pur, c'est-à-dire, qui ne signifie que des unitez ou des parties d'unitez sans appliquer l'idée d'unitez à des grandeurs particulieres comme des aunes, des toises, des livres, des sols, &c. ainsi dans l'exemple précedent il faut multiplier 15 liv.

par 12, en considérant le multiplicateur 12 comme un pur nombre contenant simplement 12 unitez : car si on consideroit 12 comme signifiant des aunes, la multiplication seroit inintelligible, parce qu'il est ridicule de multiplier des livres par des aunes. Cette remarque touchant le multiplicande & le multiplicateur, doit s'entendre des nombres complexes & des incomplexes.

98. Pour multiplier un nombre complexe par un autre, il faut 1°. réduire chacun des deux nombres à la plus petite espece qu'il contient : 2°. multiplier l'un par l'autre les deux nombres réduits : 3°. diviser le produit de cette multiplication par le nombre qui exprime combien de fois la plus grande espece du multiplicateur contient la plus petite ; & le quotient sera le produit cherché. Mais ce produit sera seulement exprimé en la plus petite espece du multiplicande, c'est-à dire, en deniers, si le multiplicande a été réduit en deniers. On pourra, si l'on veut, réduire ce produit en sols, & ensuite en livres, par le moyen de la division. Tout cela s'entendra par des exemples.

EXEMPLE I.

On demande combien valent 4 toises 5 pieds 8 pouces à 3 l. 2 s. 4 d. la toise. Pour trouver cette valeur, il faut multiplier 3 liv. 2 s. 4 d. par 4 toises 5 pieds 8 pouces : & afin de faire cette multiplication, 1°. je réduis 3 liv. 2 s. 4 d. à la plus petite espece, c'est-à-dire, à des deniers, la somme est 748. Je réduis pareillement 4 toises 5 pieds 8 pouces à la plus petite espece qui sont les pouces ; la somme est 356. 2°. Je multiplie ces deux sommes 748 & 356 l'une par l'autre : le produit est 266288. 3°. Je divise ce produit par 72 qui marque combien de fois la toise contient le pouce ; & je trouve 3698 au quotient, & le reste 32 à diviser par 72 ; ainsi la valeur de 4 toises 5 pieds 8 pouces est 3698

deniers & la fraction $\frac{32}{72}$ que l'on peut négliger, parce qu'elle ne vaut pas un denier.

Si on veut réduire 3698 deniers en sols, il faut diviser cette somme par 12, parce que 12 d. font un sol, & on trouvera 308 s. & 2 d. de reste. Enfin il faut encore diviser 308 par 20, afin d'avoir la somme des livres contenuës dans 308 s. ce qui se fera aisément par la méthode expliquée dans l'article 95, on trouvera 15 liv. 8 s. Par conséquent 4 toises 5 pieds 8 pouces à 3 liv. 2 sols 4 den. la toise, valent 15 liv. 8 sols 2 den. & la fraction $\frac{32}{72}$ qui marque seulement quelques parties du denier.

EXEMPLE II.

Combien doivent rapporter 10 liv. 3 s. 4. d. en supposant qu'une livre rapporte 3 liv. 2 s. 6 d. il faut multiplier cette derniere somme par le premier nombre: ainsi 1°. Je réduis 3 liv. 2 s. 6 d. en 750 d. & pareillement je réduis le multiplicateur 10 l. 3 s. 4 d. en 2440 den. 2°. Je multiplie 750 par 2440, le produit est 1830000. 3°. Je divise ce produit par le nombre 240 qui exprime combien de fois la grande espece du multiplicateur contient la plus petite, c'est-à-dire, combien il y a de deniers dans une livre; le quotient est 7625: c'est le produit cherché exprimé en deniers.

En réduisant 7625 den. en livres on trouvera 31 liv. 15 s. 5 d. c'est ce que rapporteront 3 liv. 2. s. 6 d. si chaque livre produit 10 liv. 3 s. 4. d.

EXEMPLE III.

Combien valent 5 marcs 7 onces & 6 gros à 48 liv. 16 s. 10 d. le marc. Pour trouver la somme qu'on cherche, il faut sçavoir que le marc contient 8 onces, & l'once 8 gros. Cela posé, 1°. je réduis 48 l. 16 s. 10 d. en 11722 d. & je réduis pareillement 5 marcs 7 onces 6 gros en 382 gros. 2°. Je multiplie 11722 par 382,

le produit est 4477804. 3°. Je divise ce produit par 64 (ce nombre 64 marque combien le marc contient de gros,) & je trouve pour quotient 69965 deniers & le reste 44.

En réduisant cette somme de deniers, on trouve 291 liv. 10 f. 5 den. qui est le prix de 5 marcs 7 onces & 6 gros à 48 liv. 16 f. 10 d. le marc. On neglige le reste 44 qui fait la fraction $\frac{44}{64}$ qui ne vaut pas un denier.

Les deux premiers articles de la méthode proposée pour la multiplication des nombres complexes, n'ont pas besoin de preuve. Voici la démonstration du troisiéme appliquée au premier exemple.

99. Si chaque pouce valoit 748 den. il est évident que 4 toises 5 pieds 8 pouces, ou 356 pouces vaudroient 266288 den. puisque ce nombre est le produit de 748 par 356. Mais par la supposition 748 den. sont le prix de la toise, & non pas du pouce : ainsi puisque la toise vaut 72 pouces, le prix d'un pouce n'est que la 72e partie de 748 d. par conséquent le prix de 356 pouces n'est aussi que la 72e partie de 266288 d. Donc afin d'avoir le prix de 356 pouces en deniers, il faut diviser 266288 deniers par 72.

100. Lorsque la premiere & plus grande espece est exprimée par un grand nombre, pour lors la multiplication devient fort longue, à cause que cette plus grande espece étant réduite à la plus petite produit un très-grand nombre. Si on cherchoit, par exemple, la valeur de 5746 toises 5 pieds 8 pouces à 3 l. 2 f. 4 d. la toise; il est évident que cette opération seroit longue, parce que les 5746 toises produiroient un très-grand nombre de pouces : dans ce cas on peut abbreger de la maniere suivante la méthode que nous venons de proposer.

Il faut chercher à part la valeur de 5746 toises sans faire aucune réduction. Pour cet effet on multipliera successivement 3 l. 2 f. 4 d. par 5746 : ce qui donnera

17238 l. 11492 f. 22984 d. Voilà déja le prix de 5746 toises à 3 l. 2 f. 4 d. Il reste encore à chercher la valeur de 5 pieds 8 pouces que l'on trouvera en suivant la méthode de l'article 98. Cette valeur est 706 d. & la fraction $\frac{32}{72}$ qui ne vaut pas un denier. Or si on ajoûte 706 à 22984 den. qu'on a déja trouvez, on aura pour le prix entier de 5746 toises 5 pieds 8 pouces, 17238 liv. 11492 sols, 23690. den. On pourra réduire les deniers en sols, comme nous avons dit, & réduire ensuite en livres les 11492 sols avec les 1974 autres sols 2 den. qui viennent de la réduction des 23690 den. ce qui donnera 673 liv. 6 sols 2 den. que l'on ajoûtera à 17238 l. & la somme sera 17911 liv. 6 sols 2 den. c'est le prix de 5746 toises 5 pieds 8 pouces à 3 liv. 2 sols 4 den. la toise, en y ajoûtant la fraction $\frac{32}{72}$ qui exprime quelques parties du denier.

101. La multiplication est plus facile lorsqu'un des deux nombres à multiplier est incomplexe : supposons par exemple, qu'on veuille sçavoir le prix de 35 toises à 4 liv. 2 sols 6 den. la toise : il faut multiplier successivement 4 liv. 2 sols 6 den. par 35, le produit est 140 liv. 70 sols 210 den. On pourra ensuite réduire les den. & les sols en liv. comme dans l'article precedent, & on aura 144 liv. 7 sols 6 den. qui est le prix cherché. On peut aussi dans le cas de cet article employer la méthode des parties aliquotes, de laquelle nous allons parler.

Lorsqu'un des deux nombres à multiplier est incomplexe, & que l'autre contient des livres, des sols & des deniers, comme dans l'exemple précedent, on peut pour lors se servir d'une autre méthode. Nous allons exposer les principes de cette methode, & ensuite nous en ferons l'application sur quelques exemples.

102. Si on veut multiplier 2 f. par un nombre, comme par 456, il faut retrancher le dernier caractere de

ce nombre, & doubler le caractere retranché, le reste exprimera des livres ; & le double du dernier caractere marquera des sols : ainsi 456 toises à 2 sols la toise valent 45 liv. 12 sols. Pareillement 35 toises à 2 sols chacune valent 3 liv. 10 sols. De même 450 toises à 2 sols chacune, valent 45 liv.

Pour entendre la raison de cette pratique, il faut considérer que si on multiplioit une livre par 456, le produit seroit 456 liv. Or 2 sols ne sont que la dixiéme partie d'une livre ; par consequent le produit de 2 sols par 456 ne doit être que la dixiéme partie de 456 liv. Or pour avoir le dixiéme de 456 liv. il faut retrancher le dernier chiffre 6 & le doubler, comme on
* 96. l'a fait voir *, ainsi la valeur de 456 toises à 2 sols chacune, est 45 liv. 12 sols.

103. Si on vouloit multiplier un nombre de sols différent de 2, par exemple 8 sols, il faudroit chercher d'abord le produit de 2 sols, & multiplier ensuite ce produit par 4, parce que 8 sols valent 4 fois 2 sols. Ainsi pour avoir le prix de 456 toises à 8 sols chacune, il faut chercher le produit de 2 sols par 456, c'est 45 liv. 12 s. & multiplier ensuite 45 liv. 12 sols par 4, le produit 182 liv. 8 sols sera le prix de 456 toises à 8 sols la toise. Si on vouloit multiplier 9 sols, il faudroit faire comme pour 8 sols, & ajoûter de plus la moitié du produit de 2 sols. Pareillement pour 12 sols il faut multiplier le produit de 2 sols par 6, & pour 13 sols il faut faire comme pour 12, & ajoûter la moitié du produit de 2 sols : ainsi des autres nombres de sols jusqu'à 20.

104. Lorsqu'on veut multiplier des deniers, il faut encore chercher le produit de 2 sols & prendre ensuite une partie de ce produit proportionnée au nombre des deniers : par exemple, si on veut multiplier 6 den. par 456, il faut chercher le produit de 2 sols par 456, c'est 45 liv. 12 sols, & prendre ensuite le quart de ce produit, parce que 6 den. sont le quart de 2 sols ou de 24 d. ainsi

le produit de 456 toiſes à 6 den. la toiſe, eſt 11 liv. 8 ſols.

Au lieu de prendre une partie du produit de 2 ſols proportionnée au nombre de deniers, il eſt plus facile de prendre une partie du produit d'un ſol, qui eſt la moitié du produit de deux ſols. Voici une table pour faire voir quelle partie du produit d'un ſol il faut prendre pour tous les nombres de deniers jusqu'à 12.

Pour 3 deniers, prenez la quatriéme partie du produit d'un ſol.
Pour 4 d. prenez le tiers.
Pour 6 d. prenez la moitié.
Pour 8 d. cherchez le tiers, & multipliez-le par 2.
Pour 1 d. cherchez le prix pour 4, & prenez-en le quart.
Pour 2 d. cherchez le prix pour 4, & prenez-en la moitié.
Pour 5 d. prenez pour 4, & enſuite pour 1.
Pour 7 d. prenez pour 4, & enſuite pour 3.
Pour 9 d. prenez pour 6, & enſuite pour 3.
Pour 10 d. prenez pour 6, & enſuite pour 4.
Pour 11 d. prenez pour 8, & enſuite pour 3.

La méthode abbregée de faire la diviſion de l'article 94 eſt fort commode pour prendre ces differentes parties du produit d'un ſol.

505. Cela poſé, on peut trouver le prix de 35 toiſes à 4 liv. 2 ſ. 6 d. la toiſe, en cette maniere : il faut multiplier 4 liv. 2 ſ. 6 d. par 35 toiſes; 1°. Le produit de 4 liv. par 35 eſt 140 liv. 2°. Le produit de 2 ſ. par 35 eſt 3 liv. 10 ſ. 3°. Le produit de 6 d. par 35, eſt 17 ſ. 6 d. Ces trois produits joints enſemble, font la ſomme de 144 liv. 7 ſ. 6 d. c'eſt le prix de 35 toiſes, à 4 liv. 2 ſ. 6 d. la toiſe.

140 liv.		
3	10 ſ.	
	17 ſ.	6 d.
144 liv.	7 ſ.	6 d.

Voici encore un autre exemple pour lequel on ſe ſert de la même méthode. On demande quel eſt le prix de 43 aunes de drap à 14 l. 15 ſ. 9 d. l'aune.

Il faut multiplier 14 l. 15 ſ. 9 d. par 43. 1°. Le produit de 14 l. par 43 eſt 602 l. 2°. Pour avoir le produit de 15 ſols par 43, je cherche d'abord le produit de 2 ſols par 43, c'eſt 4 liv. 6 ſols; & je multiplie ce produit par 7, je trouve 30 liv. 2 ſ. j'ajoûte encore le produit d'un ſol, parce que 15 ſ. valent 7 fois 2 ſ. & 1 ſ. de plus; ce produit par 1 ſ. eſt la moitié de 4 l. 6 ſ. 3°. Pour avoir le produit de 9 d. je prends d'abord pour 6, c'eſt 1 l. 1 ſ. 6 d. & enſuite pour 3 d. c'eſt 10 ſ. 9 d. Tous ces produits ajoûtez enſemble, font la ſomme de 635 liv. 17 ſols 3 den.

602 liv.		
30	2 ſ.	
2	3	
1	1	6 d.
	10	9
635 l.	17 ſ.	3 d.

106 Il y a quelques cas où l'on peut abbréger la multiplication: par exemple, ſi on veut multiplier 5 ſols, il faut prendre le quart du multiplicateur, & on aura le produit en livres; parce que 5 ſols ſont le quart d'une livre. Si on veut multiplier 10 ſols il faut prendre la moitié du multiplicateur. Pareillement s'il faut multiplier 3 ſ. 4 d. il n'y a qu'à prendre la ſixiéme partie du multiplicateur, parce que 3 ſ. 4 d. font la ſixiéme partie d'une livre. Enfin s'il faut multiplier 6 ſ. 8 d. on prendra le tiers du multiplicateur. Lorſqu'on a un peu d'habitude dans le calcul, il n'eſt pas difficile de trouver ſoi-même des abbregez dans certains cas.

DE LA DIVISION DES NOMBRES complexes.

Quand on aura bien compris la multiplication des nombres complexes, il ſera facile d'entendre la diviſion de ces nombres; c'eſt pourquoi nous en parlerons en peu de mots après avoir obſervé que comme dans la multiplication le multiplicateur eſt conſidéré com-
* 97. me un nombre pur, * pareillement dans la diviſion on doit conſidérer tantôt le diviſeur, tantôt le quotient

comme un nombre pur, c'est-à-dire, qui ne contient que des unitez que l'on conçoit, sans les appliquer aux grandeurs particulieres, comme sont les toises, les pieds, les marcs, les onces, &c.

7 marcs 2 onces d'argent ayant couté 346 l. 18 s. 6 d. on demande à combien revient le marc. L'état de la question fait voir que c'est en divisant 346 l. 18 s. 6 d. que l'on trouvera le prix de chaque marc. Voici la méthode pour faire cette division.

107. 1°. Il faut réduire le diviseur à la plus petite espece qu'il contient. 2°. Faire la division en commençant par les plus grandes especes du dividende, & allant de suite aux plus petites. 3°. Multiplier le quotient entier par le nombre qui marque combien de fois la plus grande espece du diviseur contient la plus petite.

108. Remarquez que s'il y a un reste après la division de la plus grande espece, par exemple, des livres, il faut réduire ce reste en sols, & ajoûter les sols qui viennent de cette réduction à ceux qui se trouvoient déja dans le dividende, pour diviser ensuite cette somme par le diviseur par lequel on a divisé les livres. Pareillement s'il y a un reste après avoir fait la division des sols, il faut réduire ce reste en deniers, pour les ajoûter aux deniers qui étoient dans le dividende. Or pour réduire les livres en sols, il faut multiplier le nombre de livres par 20, parce que la livre vaut 20 s. & de même pour réduire les sols en deniers, il faut multiplier le nombre de sols par 12.

Pour faire l'application de cette méthode à l'exemple proposé. 1°. Je réduis tout le diviseur 7 marcs 2 onces, en 58 onces. 2°. Je divise 346 l. 18 s. 6 d. par 58, en commençant par les livres, & je trouve au quotient 5 l. & le reste 56 que je réduis en sols en le multipliant par 20; le produit est 1120, auquel il faut ajoûter les 18 s. du dividende, il vient 1138, que je divise par 58, & je trouve au quotient 19 s. & le reste 36

que je réduis en 432 d. aufquels ajoûtant les 6 d. du dividende, la fomme eft 438 : je divife encore cette fomme par 58, & je trouve au quotient 7 d. & la fraction $\frac{32}{58}$ que l'on peut négliger. Ainfi le quotient entier eft 5 liv. 19 fols 7 den. fans compter la petite fraction $\frac{32}{58}$ qui n'exprime que des parties de deniers. 3°. Je multiplie ce quotient entier par 8, parce que le marc contient 8 onces, le produit eft 47 l 16 f. 8 d. c'eft le prix d'un marc, en fuppofant que 7 marcs 2 onces ont couté 346 liv. 18 f. 6 den.

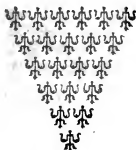
On n'a point eu d'égard à la fraction $\frac{32}{58}$; mais fi on n'avoit rien voulu négliger, il auroit fallu multiplier le numérateur 32 par 8, comme on le verra dans la fuite, en parlant de la multiplication des fractions.

Si le divifeur avoit contenu des gros, il auroit fallu multiplier le quotient par 64, parce que le marc contient 64 gros.

109. Il n'y a point de difficulté par rapport au premier & au fecond article de la méthode. Voici la raifon du troifiéme. Il eft clair que le quotient que l'on trouve après avoir divifé 346 l. 18 f. 6 d. par 58, exprime la valeur d'une once, parce que le divifeur 58 marque des onces; par conféquent afin d'avoir la valeur du marc, il faut multiplier le quotient par le nombre qui exprime combien il y a d'onces dans le marc, c'eft-à-dire, par 8; & le produit fera la valeur du marc.

110. Lorfque le divifeur eft un nombre incomplexe, pour lors le premier & le troifiéme article de la méthode n'ont point de lieu. Voici un exemple : 26 muids de vin ayant couté 1467 liv. 12 f. 8 d. on demande à combien revient le muid. Il faut divifer par 26 les liv. enfuite les fols, & enfin les deniers du dividende comme dans l'exemple précedent, & on trouvera 56 liv. 8 fols 11 den. plus 10 den. à divifer par 26 : c'eft le prix d'un muid.

Dans les deux exemples qu'on a rapportés, c'eſt le diviſeur qui doit être conſidéré comme un pur nombre, parce qu'il marque ſeulement en combien de parties égales il faut partager le dividende : mais il y a des queſtions dans leſquelles c'eſt le quotient qu'on doit regarder comme un pur nombre, parce qu'il ne fait qu'exprimer combien de fois le diviſeur eſt contenu dans le dividende : ſi, par exemple, on propoſe à diviſer 67 l. 18 ſ. 6 d. par 5 l. 4 ſ. 6 d. il eſt évident que l'on ne cherche autre choſe qu'un nombre qui marque combien de fois le diviſeur eſt contenu dans le dividende.





ABREGÉ

D'ALGEBRE.

111. L'Algebre est une partie des Mathématiques qui traite de la grandeur en général, exprimée par les lettres de l'alphabet.

112. On se sert des caracteres de l'alphabet préferablement à d'autres, tant parce qu'on les connoît & qu'on est accoûtumé de les écrire, que parce que ne signifiant rien par eux-mêmes, on peut les employer pour exprimer toutes sortes de grandeurs.

113. De ce que les caracteres dont on se sert dans l'Algebre, peuvent exprimer toutes sortes de grandeurs, il s'ensuit que les démonstrations de l'Algebre sont générales : ce qui est un des principaux avantages de cette Science.

114. Un autre avantage de l'Algebre, c'est qu'on opere également sur les quantitez inconnuës comme sur celles qui sont connuës. On employe ordinairement les premieres lettres de l'alphabet a, b, c, &c. pour désigner les grandeurs connuës ; & les dernieres r, s, t, u, x, y, z, pour exprimer les inconnuës.

115. Ceux qui commencent à étudier l'Algebre, sont souvent fort embarrassez sur la signification des caracteres a, b, c, d, &c. qui ne présentent aucun objet déterminé à l'esprit ; ils sont même tentez de croire que tout le calcul algébrique est un vain amusement qui ne peut avoir aucune application aux objets de nos connoissances. Mais de ce que ces caracteres ne

signifient rien par eux-mêmes, on en doit plutôt conclure qu'on les peut employer pour exprimer toutes sortes de grandeurs, & que par conséquent le calcul algébrique peut être appliqué aux grandeurs de toutes especes, étenduës, nombres, mouvemens, vitesses, &c. d'ailleurs personne n'est embarrassé sur la signification des caracteres arithmétiques 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. qui cependant ne présentent aucun objet déterminé à l'esprit non plus que les lettres de l'alphabet: par exemple, le chiffre 4 ne signifie ni quatre toises, ni quatre pieds, ni quatre hommes, ni quatre écus, &c. On ne doit donc pas non plus se mettre en peine de chercher la signification des lettres a, b, c, d, &c. il suffit de sçavoir qu'on peut les employer à marquer toutes sortes de grandeurs.

116. On fait sur les lettres dans l'Algebre les mêmes opérations que l'on fait sur les nombres dans l'Arithmetique. Il y en a quatre principales, l'addition, la soustraction, la multiplication, & la division. Avant de traiter de ces opérations, il est nécessaire d'expliquer les signes & les termes dont on se sert dans l'Algebre.

117. Ce signe $+$ signifie plus, & cet autre $-$ signifie moins: le premier est la marque de l'addition; ainsi $a+b$ signifie que la grandeur b est ajoûtée avec a; le second est la marque de la soustraction; ainsi $a-b$ signifie que la quantité b est ôtée de a.

118. Ce signe $=$ signifie égal, & marque qu'il y a égalité entre les quantitez qui le précedent & celles qui le suivent; ainsi $a=b$ signifie que a est égal à b. Pareillement $a-b=c+d$ marque que $a-b$ est égal à $c+d$.

119. Voici encore deux signes $>$ & $<$ dont le premier signifie plus grand, & l'autre plus petit; ainsi $a>b$ marque que la quantité a est plus grande que b; & $a<b$ signifie que a est moindre que b. Afin de ne pas confondre ces deux signes, il faut remarquer que la

quantité que l'on met du côté de l'ouverture eſt toûjours la plus grande, & que celle qui eſt du côté de la pointe eſt la plus petite : cela paroît par les exemples qu'on vient de donner.

120. Les lettres de l'alphabet ſur leſquelles on opere, ſont appellées *quantitez algebriques.*

121. Les quantitez algebriques ſont nommées *ſimples*, *incomplexes* ou *monomes*, lorſqu'elles ne ſont pas jointes enſemble par les ſignes + & —; ainſi $+a$, $+5\,ab$, & $-4aa$ ſont trois quantitez incomplexes.

122. Lorſque pluſieurs quantitez algebriques ſont jointes enſemble par les ſignes + & —, leur ſomme eſt appellée quantité *composée*, *complexe* ou *polynome*, ainſi $a-b$, $c-d+f$ ſont des quantitez complexes.

123. Dans les quantitez complexes les parties ſéparées par les ſignes + & — ſont appellées *termes*; ainſi dans la quantité $ab-cd-bd$, il y a trois termes; ſçavoir ab, cd & bd.

124. Les quantitez complexes qui n'ont que deux termes, ſont appellées *binomes*; celles qui en ont trois, *trinomes*, &c. ainſi $a+b$ eſt un binome, & $ab+cd-bd$ eſt un trinome.

125. Les quantitez incomplexes qui ſont précedées du ſigne + ſont appellées *poſitives*; & celles qui ſont précedées du ſigne — ſont appellées *negatives.* Les termes des quantitez complexes ſont auſſi appellez *poſitifs* ou *négatifs* ſelon qu'ils ſont précedez du ſigne + ou —.

Lorſque dans une quantité complexe, il y a pluſieurs termes négatifs de ſuite, celui ou ceux qui ſont après le premier de ces termes ne diminuent pas la valeur de ce premier: par exemple ſi on a la quantité $+12-5-3$, cela ne marque pas qu'il faut ſeulement retrancher $5-3$, c'eſt-à-dire, 2 de 12 : mais cela ſignifie au contraire qu'il faut ôter de 12 les deux nombres 5 & 3; ainſi $+12-5-3$ ne vaut que 4. Il faut dire la même choſe des quantitez algébriques quand elles contiennent

plusieurs termes négatifs de suite : c'est pourquoi il n'importe en quelle maniere les termes soient arrangés. Ainsi $a+b-c-d$ est la même chose que $a-c+b-d$.

126. Remarquez que les quantitez incomplexes qui ne sont précedées d'aucun signe, sont supposées avoir le signe $+$, & sont par consequent positives. Il en est de même du premier terme des quantitez complexes : ainsi ab est la même chose que $+ab$. Pareillement $ab+cd-bd$ est la même chose que $+ab+cd-bd$.

127. Il faut bien remarquer que les quantitez négatives sont des grandeurs opposées aux quantitez positives : par exemple, si le mouvement vers l'Orient est pris pour positif, le mouvement vers l'Occident sera négatif. Pareillement le bien que l'on possede peut être regardé comme une grandeur positive, & ce que l'on doit comme une quantité négative. De cette notion des quantitez positives & négatives, il s'ensuit que les unes & les autres sont également réelles, & que par conséquent les négatives ne sont pas la négation ou l'absence des positives ; mais que ce sont certaines grandeurs opposées à celles que l'on regarde comme positives ; ainsi dans le premier exemple qu'on vient de proposer, la quantité négative par rapport au mouvement vers l'Orient, n'est pas de n'avoir point de mouvement vers l'Orient ; mais c'est d'avoir un mouvement vers l'Occident ; & dans le second exemple, la quantité négative par rapport au bien que l'on possede, ce sont les dettes que l'on a, & non pas de n'avoir point de bien.

128. Lorsque l'on compare deux quantitez égales en mettant le signe $=$ entre deux, cela s'appelle *équation* ou *égalité* : par exemple $a+b=c$ est une équation. Les deux quantitez que l'on compare sont appellées *membres* de l'équation : la quantité qui est à la gauche du signe d'égalité est le *premier membre*, & celle qui est à la droite est le *second* : ainsi dans l'é-

& 4, & j'écris la somme 7 avec le signe $+$ qui est celui des termes semblables : ainsi la quantité réduite est $+7abb+2ab$ ou $7abb+2ab$. De même pour faire la réduction des trois derniers termes de la quantité $5bb-3bd-4bd-bd$, j'ajoute les trois coefficiens, 3, 4, & 1, & j'écris la somme qui est 8 avec le signe $-$ en cette maniere $5bb-8bd$. (On a pris l'unité pour coefficient du dernier terme $-bd$, parce qu'il n'en a point qui soit marqué.) * * 129.

Mais si les termes semblables ont des signes différens, pour lors il faut ôter le plus petit coefficient du plus grand, & écrire le reste avec le signe du plus grand coefficient : par exemple, afin de faire la réduction de la quantité $-3ab+5ab+7aa$ dont les deux premiers termes sont semblables, il faut ôter 3 de 5, & écrire 2 avec le signe $+$ qui est celui du plus grand coefficient 5 ; ainsi la quantité réduite est $+2ab+7aa$ ou $2ab+7aa$. Pareillement afin de faire la réduction de la quantité $3cx-7xx+5xx$, dont les deux derniers termes sont semblables, il faut ôter 5 de 7, & écrire le reste 2 avec le signe $-$ en cette maniere, $3cx-2xx$.

DE L'ADDITION.

132. L'Addition est une opération par laquelle on cherche la somme de plusieurs quantitez : par exemple, si ayant les trois nombres 6, 9 & 10, je les joins ensemble pour en avoir la somme qui est 25 ; cela s'appelle faire l'addition de ces trois nombres.

133. Afin d'ajoûter les quantitez algébriques, il n'y a qu'à les écrire telles qu'elles sont, sans rien changer aux signes qui les précedent : par exemple, si on veut ajoûter b ou $+b$ avec a, on écrit $a+b$: mais si on vouloit ajoûter $-b$ avec a, il faudroit mettre $a-b$. Pour ajoûter $c-d$ avec $a+b$, on écrira $a+b+c-d$. Pour ajoûter $-3aab+2ad$ avec $5aab-7ad+3cd$, on écrira $5aab-7ad+3cd-3aab+2ad$.

f iv

134. Lorsqu'après l'addition il y a des quantitez semblables dans la somme, il faut faire la réduction ; ainsi dans le dernier exemple qu'on vient de proposer, la somme qu'on a trouvée se réduit à $2aab - 5ad + 3cd$. Souvent dans la pratique on fait la réduction en même tems que l'addition.

135. Cette opération porte sa démonstration avec elle, étant évident que la somme de a & de b est $a+b$; & que celle de a & de $-b$ est $a-b$: ainsi des autres exemples.

DE LA SOUSTRACTION.

136. La soustraction est une operation par laquelle on ôte une grandeur d'une autre. Ainsi si on ôte 4 de 7, c'est une soustraction. La grandeur qui résulte après la soustraction est appellée *reste* ou *difference*. Dans l'exemple proposé 3 est le reste ou la différence.

137. Pour ôter une quantité algébrique d'une autre, il faut changer les signes de la quantité à soustraire, & laisser ceux de la quantité dont on veut soustraire. Exemples : pour ôter b ou $+b$ de a, il faut écrire $a-b$: mais pour ôter $-b$ de a, il faut écrire $a+b$. Pour soustraire $c-d$ de $a+b$, on écrira $a+b-c+d$. Pour soustraire $-3aab+2ad$ de $5aab-7ad+3cd$, on écrira $5aab-7ad+3cd+3aab-2ad$.

138. Lorsqu'après la soustraction il y a des quantitez semblables dans le reste, il faut faire la réduction ; ainsi dans le dernier exemple qu'on vient de proposer, le reste qu'on a trouvé se réduit à $8aab - 9ad + 3cd$. Souvent dans la pratique on fait la réduction en même tems que la soustraction.

On entend facilement pourquoi dans la quantité à soustraire on change le signe de plus en moins : par exemple, si on veut ôter b de a, il est évident que le reste sera $a-b$. Mais on ne voit pas d'abord pourquoi on change le signe de moins en plus : par exemple,

ſi on veut ôter $-b$ de a, & qu'on écrive $a+b$ ſelon la regle preſcrite, il ſemble que l'on aura fait le contraire de ce que l'on ſe propoſoit; parce que $a+b$ eſt plutôt une ſomme qu'un reſte.

139. Pour faire comprendre la raiſon de la regle dans le cas où il y a des ſignes de moins dans la quantité à ſouſtraire, nous allons prendre un exemple en nombre. Suppoſons donc qu'il s'agiſſe de ſouſtraire $7-3$ de 12 : je dis qu'il faut écrire $12-7+3$: car ſi on écrit $12-7$, il eſt évident qu'on a trop ôté de 12, parce qu'on ne veut pas ôter 7 de 12, mais ſeulement $7-3$ qui eſt moindre que 7; par conſéquent il faut ajoûter 3 qu'on a ôté de trop en mettant $12-7$, c'eſt-à-dire, qu'il faut écrire $12-7+3 = 8$.

Que s'il s'agit d'ôter une quantité négative toute ſeule, il eſt encore évident qu'il faut changer le ſigne de moins en plus : par exemple, ſi on veut ſouſtraire $-b$ de a, il faut écrire $a+b$. Car ôter une quantité négative, c'eſt en ajoûter une poſitive; comme ſi un homme devant cent écus, on lui ôte, c'eſt-à-dire, qu'on lui remette cette dette qui eſt une quantité négative, c'eſt la même choſe que ſi on lui donnoit cent écus; par conſéquent afin de faire la ſouſtraction, il faut changer les ſignes de la quantité à ſouſtraire, en mettant moins à la place de plus, & plus à la place de moins.

DE LA MULTIPLICATION.

140. Multiplier une grandeur par une autre, c'eſt prendre la premiere autant de fois qu'il eſt marqué par la ſeconde : par exemple, multiplier 5 par 3, c'eſt prendre 5 autant de fois qu'il eſt marqué par 3; c'eſt-à-dire, trois fois : ce qui fait 15. Il y a trois choſes à diſtinguer dans la multiplication; ſçavoir, *le multiplicande*, le *multiplicateur* & le *produit*.

Le multiplicande ou le multiplié, c'eſt la grandeur qu'on multiplie. Le multiplicateur eſt celle par laquelle on multiplie, & le produit eſt la quantité qui réſulte de la multiplication : dans l'exemple propoſé 5 eſt le multiplicande ou le multiplié, 3 eſt le multiplicateur, & 15 eſt le produit.

Cette notion de la multiplication convient aux quantitez litterales ou algébriques auſſi-bien qu'aux nombres, en ſorte que multiplier *a* par *b*, c'eſt prendre la grandeur *a* autant de fois qu'il eſt marqué par *b*.

141. On peut donc définir la multiplication, une opération par laquelle on cherche une grandeur qu'on nomme produit qui contienne autant de fois le multiplié, que le multiplicateur contient l'unité : par exemple, ſi on multiplie 6 par 4, on trouvera pour produit un nombre, ſçavoir 24, qui contient 6 quatre fois, de même que 4 contient 1 quatre fois. Cela eſt évident par l'expreſſion même dont on ſe ſert dans la multiplication des nombres, puiſque pour multiplier 6 par 4, on dit quatre fois 6 ; le produit doit donc contenir 6 quatre fois, c'eſt-à-dire, autant de fois que 4 contient l'unité. Cette définition convient également aux quantitez litterales.

142. Le produit de deux grandeurs algébriques ſe marque en mettant l'une à côté de l'autre ; ainſi *ab* déſigne le produit de *a* par *b* : *aa* ſignifie pareillement le produit de *a* par *a*. Pour marquer la multiplication, on ſe ſert auſſi du ſigne $\times$ en le mettant entre les deux grandeurs qu'on multiplie : par exemple $a \times b$ exprime le produit de *a* par *b* : $a \times a$ marque auſſi le produit de *a* par *a*. Il eſt plus ordinaire de placer une lettre à côté de l'autre ſans mettre aucun ſigne entre deux, comme nous l'avons dit d'abord.

143. Le multiplicande & le multiplicateur ſont ſouvent appellez les *racines* du produit : par exemple, *a* & *b* ont les racines du produit *ab* ; & lorſque les deux ra-

cines d'un produit ſont égales, on les appelle *racines quarrées*. Ainſi *a* eſt la racine quarrée du produit *aa*. Dans la ſuite nous parlerons plus au long des racines.

144. On diſtingue deux ſortes de multiplications algébriques, celle des quantitez incomplexes & celle des quantitez complexes. Nous en traiterons ſéparément. Mais avant d'expliquer les regles de l'une & l'autre multiplication, il eſt néceſſaire de démontrer que quand on multiplie pluſieurs grandeurs, comme *a*, *b*, *c*, les unes par les autres, le produit eſt toûjours le même, quelque ordre qu'on obſerve dans la multiplication; c'eſt-à-dire, que les produits *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*, ſont égaux : & de même tous les produits qu'on peut former de quatre grandeurs ſont égaux : pareillement tous les produits qu'on peut faire de cinq grandeurs ſont égaux : ainſi de ſuite.

145. Remarquez que deux grandeurs *a* & *b* peuvent recevoir deux arrangemens differens, *ab*, *ba*. Trois grandeurs *a*, *b*, *c*, peuvent recevoir trois fois deux ou 6 arrangemens : car chacune des trois étant miſe dans le premier rang, les deux autres peuvent recevoir deux arrangemens : ce qui fait trois fois deux ou 6 arrangemens que voici, *abc*, *acb*; *bac*, *bca*; *cab*, *cba*. Quatre grandeurs, *a*, *b*, *c*, *d*, peuvent recevoir 4 fois 6 ou 24 arrangemens : car chacune étant miſe au premier rang, les trois autres peuvent recevoir ſix arrangemens, ce qui fait 4 fois 6 ou 24 que voici : *abcd*, *abdc*, *acbd*, *acdb*, *adbc*, *adcb*; *bacd*, *badc*, *bcad*, *bcda*, *bdac*, *bdca*; *cabd*, *cadb*, *cbad*, *cbda*, *cdab*, *cdba*, *dabc*, *dacb*, *dbac*, *dbca*, *dcab*, *dcba*. De même cinq grandeurs peuvent recevoir 5 fois 24 ou 120 arrangemens : ſix en peuvent recevoir 6 fois 120 ou 720; ainſi de ſuite.

On ſuppoſe ordinairement comme une choſe qui n'a pas beſoin de démonſtration, que le produit de deux grandeurs ſeulement eſt toûjours le même, de quelque maniere que ces deux grandeurs ſoient mul-

tipliées : par exemple, le produit de 4 & 3 eſt toûjours le même, ſoit que l'on multiplie 4 par 3 ou 3 par 4 : on peut s'en convaincre en cette maniere.

146. Suppoſons qu'il y ait 12 points arrangez comme on le voit; il eſt évident que dans ces 12 points, il y a trois rangs, comme le ſuperieur qui eſt marqué par *mn*, dont chacun contient 4 points; & par conſéquent ces 12 points contiennent 3 fois 4 points, ni plus ni moins. Il eſt pareillement évident que dans ces 12 points il y a quatre colomnes comme celle qui eſt marquée par *mp*, dont chacune contient 3 points; ainſi ces 12 points contiennent auſſi 4 fois 3 points; donc le produit de 4 par 3 eſt égal à celui de 3 par 4, puiſque l'un & l'autre eſt 12. On peut dire la même choſe de deux autres nombres, ou deux autres quantitez telles qu'elles ſoient : par exemple, ſi on multiplie *a* par *bc*, que l'on peut regarder comme une ſeule grandeur, le produit $a\times bc$ ou *abc* eſt égal à celui de *bc* par *a*.

m			*n*
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
p			

Cela poſé, nous allons démontrer dans le lemme ſuivant que tous les produits des trois grandeurs *a*, *b*, *c*, ſont égaux; que tous ceux qui viennent des quatre grandeurs *a*, *b*, *c*, *d*, ſont égaux, &c.

LEMME.

147. *Les produits qui naiſſent de la multiplication des mêmes grandeurs ſont égaux, en quelque ordre qu'on multiplie ces grandeurs.*

1°. Tous les produits des trois grandeurs *a*, *b*, *c*, ſont égaux : car ſi entre les ſix produits qui peuvent venir de la multiplication des trois grandeurs *a*, *b*, *c*, on prend les deux *abc* & *acb* où la lettre *a* eſt la premiere, il eſt facile de faire voir qu'ils ſont égaux, puiſque les deux produits *bc* & *cb* étant égaux, comme on l'a prouvé, il s'enſuit qu'en multipliant *a* par *bc*

& par cb, les deux nouveaux produits $a \times bc$ & $a \times cb$ ou abc & acb sont aussi égaux. Par la même raison les deux produits bac & bca dans lesquels la lettre b est la premiere, sont encore égaux. Enfin les deux autres produits cab & cba, où la lettre c est la premiere, sont pareillement égaux entr'eux. Il ne s'agit donc plus que de faire voir qu'un des produits égaux abc & acb dont la lettre a occupe le premier rang, est égal à un des produits dont chacune des deux autres lettres b & c tient la premiere place : c'est ce que je démontre en cette maniere : le produit de a par bc est égal à celui de bc par a *; ainsi $abc = bca$. Pareillement le produit de * 146.
a par cb est égal à celui de cb par a *; ainsi $acb = cba$. * 146.
Par conséquent les six produits qu'on peut former des trois grandeurs a, b, c, sont égaux.

2°. Les 24 produits qu'on peut former des quatre grandeurs a, b, c, d, sont égaux. Car entre ces 24 produits, il est clair que les six où la lettre a est la premiere, sont égaux entr'eux, puisque les six produits des trois grandeurs b, c, d, étant égaux, il faut que les six produits suivans $a \times bcd$, $a \times bdc$, $a \times cbd$, $a \times cdb$, $a \times dbc$, $a \times dcb$, soient aussi égaux entr'eux. Par la même raison les six produits où chacune des trois autres lettres b, c, d, occupe la premiere place, sont égaux entr'eux. Il reste donc à démontrer qu'il y a un produit dans les six dont a occupe la premiere place, égal à un des six produits, où chacune des trois autres lettres b, c, d, occupe la premiere place : ce qui se prouve de la même maniere que dans la premiere partie ; il suffit d'exposer les égalitez suivantes, $a \times bcd = bcd \times a$; $abd \times c = c \times abd$; $acb \times d = d \times acb$.

Il est visible qu'en se servant de la même méthode, on fera voir que tous les produits qui viennent de la multiplication des cinq grandeurs a, b, c, d, e, sont égaux ; ainsi de suite.

148. Quoique l'on puiſſe donner quel rang on veut aux différentes lettres d'un produit, cependant il eſt bon de les écrire toûjours ſuivant le rang qu'elles ont dans l'Alphabet : par exemple, dans un produit compoſé de trois lettres *a*, *b*, *c* ; il faut toûjours écrire *abc*, & non pas *bac*, ou *cab*, &c. la pratique de cette remarque fait éviter des fautes de calcul.

DE LA MULTIPLICATION des quantitez incomplexes.

Il y a trois regles à obſerver dans la multiplication de l'Algebre : la premiere regarde les ſignes de plus & de moins qui précedent les quantitez qu'il faut multiplier l'une par l'autre : la ſeconde eſt pour les coefficiens : & la troiſiéme pour les lettres qui deſignent les grandeurs.

149. I. REGLE. Lorſque le multiplicande & le multiplicateur ont le ſigne $+$, on doit mettre $+$ au produit. Lorſque l'un a le ſigne $+$, & l'autre le ſigne $-$, il faut mettre $-$ au produit. Enfin lorſque le multiplicande & le multiplicateur ont tous les deux le ſigne $-$, il faut mettre $+$ au produit. Voici des exemples pour ces trois cas. Premier cas. $+a$ multiplié par $+b$ donne $+ab$. Second cas. $+a$ multiplié par $-b$ donne $-ab$, & de même $-a$ multiplié $+b$ donne $-ab$. Troiſiéme cas. Enfin $-a$ multiplié par $-b$ donne $+ab$. Nous nous ſervirons dans la ſuite du ſigne de la multiplication afin d'abréger ; ainſi au lieu d'écrire $-a$ multiplié par $-b$ donne $+ab$, nous mettrons $-a \times -b$ donne $+ab$, ou bien $-a \times -b = +ab$. Pareillement, au lieu d'écrire $+a$ multiplié par $-b$ donne $-ab$, nous mettrons $+a \times -b$ donne $-ab$, ou bien $+a \times -b = -ab$.

On peut réduire les trois cas de cette regle à deux ſeulement, en diſant que quand le multiplicande & le

multiplicateur ont des ſignes ſemblables, ſoit qu'ils ayent tous les deux $+$ ou tous les deux $-$, on doit mettre $+$ au produit : mais au contraire, lorſque ces ſignes ſont différens, c'eſt-à-dire, que l'un eſt $+$ & l'autre eſt $-$, il faut mettre $-$ au produit.

150. II. REGLE. On multiplie les coefficiens comme tous les autres nombres : mais il faut ſe ſouvenir que quand une quantité littérale n'a pas de coefficient marqué, on ſuppoſe que l'unité eſt le coefficient de cette quantité. Voici des exemples. $+3a \times +2b$ donne $+6ab$. $-4a \times +b = -4ab$. $+5a \times +4c = 20ac$.

151. III. REGLE. Pour marquer que deux quantitez littérales ou algébriques ſont multipliées l'une par l'autre, on écrit ces lettres à côté l'une de l'autre, ou bien on met le ſigne $\times$ entre deux, comme nous l'avons déja dit : ainſi le produit de a par b eſt ab, celui de ab par c eſt abc, celui de aa par ac eſt $aaac$.

152. Lorſqu'une lettre eſt écrite pluſieurs fois dans un même terme, alors on peut ne l'écrire qu'une fois en mettant à la droite de cette lettre un chiffre qui marque combien de fois elle doit être écrite : par exemple, a^2 ſignifie la même choſe que aa ; pareillement $a^3c = aaac$; $a^3b^2 = aaabb$. Ce chiffre que l'on met à la droite d'une lettre pour marquer combien de fois elle doit être écrite dans un terme, eſt appellé *expoſant* : ainſi dans les termes a^2, b^5, c^4, les chiffres 2, 5 & 4 ſont les expoſans. Il paroît par ces exemples que les expoſans doivent être un peu plus élevez que les lettres.

REMARQUES.

I.

153. Quand une lettre n'eſt écrite qu'une fois, & qu'elle n'a pas d'expoſant marqué, pour lors il faut concevoir que l'unité eſt ſon expoſant : par exemple, $a = a^1$; $ab^3 = a^1b^3$; $ac = a^1c^1$.

II.

154. Il y a une grande difference entre le coefficient & l'exposant d'une lettre : $3a$, par exemple, est fort différent de a^3. Pour s'en convaincre, il n'y a qu'à supposer que a signifie 4, alors $3a$ exprimera 3 fois 4, c'est-à-dire 12, au lieu que a^3 ou aaa sera égal à 64 : car aa ou 4×4 est égal à 16 ; par conséquent si on multiplie encore aa ou 16 par $a = 4$, le produit aaa sera 64.

III.

155. Lorsque dans le multiplicande & le multiplicateur, il y a une même lettre avec des exposans égaux ou inégaux, pour lors on écrit une seule fois cette lettre au produit avec la somme des exposans. Exemples. $a^2 \times a^3 = a^5$; $a \times a^3 = a^4$; $a^3b^4 \times a^5b^2 = a^8b^6$; $4a^2 \times 5ab^3 = 20a^3b^3$. Voici la raison de cette remarque : $a^2 = aa$ & $a^3 = aaa$. Or $aa \times aaa = aaaaa$ ou a^5 ; donc $a^2 \times a^3 = a^5$. Cette raison peut s'appliquer à tous les autres exemples. On voit encore par là, qu'il faut mettre de la différence entre les coefficiens & les exposans, puisque l'on multiplie toûjours les coefficiens ; au lieu que l'on ne fait qu'ajoûter les exposans de la même lettre qui se trouve au multiplicande & au multiplicateur.

La troisiéme regle qui est celle des lettres ne doit pas être démontrée ; d'autant que l'une & l'autre maniere marquée dans cette troisiéme régle pour désigner un produit est entierement arbitraire.

La seconde regle n'a pas non plus besoin de démonstration : car les coefficiens étant des nombres, il est évident qu'il faut les multiplier comme on fait les nombres : par exemple, si on veut multiplier $3a$ par $2b$, il est clair que l'on doit prendre deux fois 3, & qu'ainsi il faut mettre 6 au produit. Il n'y a donc que la premiere regle qui est celle des signes, qui demande une démonstration particuliere. Lorsqu'on veut énoncer

cette

cette regle, on s'exprime en cette maniere : plus par plus donne plus, plus par moins ou moins par plus donne moins : enfin moins par moins donne plus : mais pour marquer ces trois cas par écrit, il suffit de mettre, pour le premier cas+×+donne+ ; pour le second+×—ou—×+donne— ; enfin pour le troisiéme—×—donne+.

156. Afin d'entendre la démonstration que nous allons donner pour la premiere regle, il faut sçavoir que quand le multiplicateur a le signe+, la multiplication se fait toûjours par addition, c'est-à-dire, que l'on ajoûte ou que l'on prend le multiplicande autant de fois qu'il est marqué par le multiplicateur ; par exemple, si le multiplicande est a & le multiplicateur+b, en multipliant a par +b, on prend a autant de fois qu'il est marqué par b. D'où il suit au contraire que quand le multiplicateur a le signe—, la multiplication se fait par voye de soustraction, c'est-à-dire, qu'on ôte le multiplicande autant de fois qu'il est marqué par le multiplicateur ; ainsi pour multiplier a par —b, il faut ôter a autant de fois qu'il est marqué par b. Cela posé, la démonstration suivante s'entendra facilement.

DE'MONSTRATION.

157. I. CAS. +×+donne+ : car pour lors le multiplicateur a le signe+ ; & par conséquent la multiplication se fait par addition. Mais d'ailleurs le multiplicande ayant aussi le signe+, c'est une quantité positive ; ainsi en multipliant plus par plus, on ajoûte ou l'on prend plusieurs fois une quantité positive, sçavoir le multiplicande ; donc le produit est une somme de grandeurs positives ; par conséquent elle doit être precedée du signe+ ; donc+×+donne+.

II. CAS. +×—ou—×+donne—. En premier lieu+×—donne— : car puisque le multiplicateur a le signe—, la multiplication se fait par voye de sous-

traction ; c'est-à-dire, qu'on ôte le multiplicande au-
tant de fois qu'il est marqué par le multiplicateur ; par
* 137. conséquent on doit changer le signe du multiplicande*.
Or le multiplicande a le signe $+$; donc le produit doit
avoir le signe $-$. En second lieu $- \times +$ donne $-$. Car
pour lors le multiplicateur ayant le signe $+$, & le mul-
tiplicande le signe $-$; on ajoûte, c'est-à-dire, qu'on
prend plusieurs fois une quantité négative, sçavoir le
multiplicande : donc le produit est une somme de
quantitez négatives ; & par conséquent il doit avoir le
signe $-$.

III. CAS. Enfin $- \times -$ donne $+$: car dans ce cas, le
multiplicateur ayant le signe $-$, le multiplicande est
soustrait autant de fois qu'il est marqué par le multipli-
cateur ; par conséquent il faut changer le signe du mul-
* 137. tiplicande*. Or le multiplicande a le signe $-$; donc le
produit doit avoir le signe $+$.

Pour entendre mieux la démonstration de ce troisiéme cas, il faut faire attention à la signification de ces termes, *multiplier moins par moins*, ausquels les commençans n'attachent souvent aucune idée distincte. Je dis donc que ces mots *multiplier moins par moins* signifient la même chose que soustraire une ou plusieurs quantitez négatives. En premier lieu il est clair par l'article 156 que multiplier par moins veut dire soustraire : car pour lors le multiplicateur, que le mot *par* désigne toûjours, a le signe moins. Or quand le multiplicateur a le signe moins, la multiplication se fait par soustraction. En second lieu, quand on dit *multiplier moins*, cela marque que le multiplicande est une quantité négative, puisqu'il est alors précédé du signe $-$. Il paroît donc que multiplier moins par moins ne veut dire autre chose que soustraire une ou plusieurs quantitez négatives. Or il est évident que pour soustraire des quantitez négatives, il faut changer le signe de moins en celui de plus. Par conséquent

le résultat ou le produit de la multiplication de moins par moins doit être precedé du signe +.

D'ailleurs le premier cas de cette démonstration ne souffre aucune difficulté : car si on a, par exemple, 5 grandeurs positives, & qu'on les multiplie par $+3$, c'est-à-dire, qu'on les prenne autant de fois qu'il est marqué par le multiplicateur 3, il est évident que le produit sera une somme de grandeurs positives ; & par conséquent ce produit doit être précedé du signe +. Il ne peut donc y avoir de difficulté que dans les deux derniers cas, & sur-tout dans le troisiéme. Or il est facile de faire voir que ces deux derniers cas suivent du premier. Je dis d'abord que si $+a \times +b$ donne $+ab$, il faut que $+a \times -b$ donne $-ab$. Car le produit de $+a$ par $-b$, doit avoir un signe opposé à celui de $+a$ par $+b$. Or le produit de $+a$ par $+b$ donne le signe + ; donc le produit de $+a$ par $-b$ doit avoir le signe —. La même raison fait aussi voir que le produit de $-a$ par $+b$ doit avoir le signe —.

Ce second cas étant prouvé, on démontre ainsi le troisiéme, en se servant du même raisonnement. Le produit de $-a$ par $-b$, doit avoir un signe différent de celui de $+a$ par $-b$. Or on vient de faire voir que ce dernier produit doit avoir le signe — ; donc le premier doit être precedé du signe +.

On peut donner plusieurs autres démonstrations de la troisiéme regle : mais celles que l'on vient de voir suffisent, pour être pleinement convaincu de la vérité de cette regle. Il nous reste à parler en peu de mots de la multiplication des quantitez complexes, qui ne souffre aucune difficulté, après ce que nous avons dit sur la multiplication des quantitez incomplexes.

DE LA MULTIPLICATION des quantitez complexes.

158. Lorsque l'on veut multiplier deux quantitez

complexes l'une par l'autre; il faut multiplier le multiplicande entier par chacun des termes du multiplicateur, en observant les trois regles prescrites pour la multiplication des quantitez incomplexes; & après qu'on a achevé ces multiplications, il faut ajoûter tous les produits particuliers; la somme sera le produit total des deux quantitez complexes.

EXEMPLE I.

Si on veut multiplier $a-3b$ par $2c-d$, il faut écrire ces deux quantitez, en sorte que le multiplicateur soit sous le multiplicande, & tirer une ligne au dessous du multiplicateur.

$$\begin{array}{l} a-3b \\ 2c-d \\ \hline 2ac-6bc \\ \quad -ad+3bd \\ \hline 2ac-6bc-ad+3bd \end{array}$$

Après cela il faut multiplier le multiplicande $a-3b$, 1°. par $2c$; le produit sera $2ac-6bc$. 2°. par $-d$; le produit sera $-ad+3bd$: enfin il faut ajoûter ces deux produits particuliers; la somme $2ac-6bc-ad+3bd$ sera le produit total.

EXEMPLE II.

$a+b$ multiplicande.
$a-b$ multiplicateur.

a^2+ab premier produit particulier.
$-ab-bb$ second produit particulier.

a^2-bb produit total.

Dans cet exemple les deux termes $+ab$ & $-ab$ ont disparu en faisant la réduction.

DE LA DIVISION.

159. Diviser une grandeur par une autre, c'est

chercher combien de fois la ſeconde eſt contenuë dans la premiere : par exemple, diviſer *ab* par *a*, c'eſt chercher combien de fois *a* eſt contenu dans *ab*. Il y a trois choſes à diſtinguer dans la diviſion, le *dividende*, le *diviſeur* & le *quotient*. Le dividende eſt la grandeur à diviſer. Le diviſeur eſt la grandeur par laquelle on diviſe, & le quotient eſt celle qui marque combien de fois le diviſeur eſt contenu dans le dividende : dans l'exemple propoſé, *ab* eſt le dividende, *a* eſt le diviſeur, & on verra dans la ſuite que *b* eſt le quotient.

160. On peut donc définir la diviſion une opération par laquelle on cherche une grandeur qu'on appelle quotient, qui marque combien de fois le dividende contient le diviſeur. Si on diviſe 18 par 6, on trouvera pour quotient 3 qui marque combien de fois le dividende 18 contient le diviſeur 6.

161. Il ſuit de cette définition que le dividende contient autant de fois le diviſeur, que le quotient contient l'unité. Dans l'exemple qu'on vient de propoſer, le dividende 18 contient le diviſeur 6 autant de fois que le quotient 3 contient l'unité. Pareillement *ab* contient autant de fois *a*, que le quotient *b* contient l'unité.

162. Pour marquer que l'on veut diviſer une grandeur par une autre, on écrit le diviſeur au-deſſous du dividende, & on tire une petite ligne entre deux : par exemple, ſi on veut indiquer la diviſion de *ab* par *a*, on écrit $\frac{ab}{a}$. Que ſi la diviſion peut ſe faire, on met le ſigne d'égalité à la ſuite de la petite ligne qui ſépare le dividende du diviſeur, & on écrit le quotient après ce ſigne d'égalité. Ainſi *b* étant le quotient de *ab* diviſé par *a*, on écrit $\frac{ab}{a} = b$. Pareillement on écrit $\frac{18}{6} = 3$ pour marquer que 3 eſt le quotient de 18 diviſé par 6.

163. Remarquez que la multiplication & la diviſion

sont des opérations opposées, en sorte que l'une remet les choses au même état où elles étoient avant l'autre: par exemple, si on divise 18 par 6, on trouvera 3 au quotient: & si après cela on vient à multiplier 6 par 3, le produit sera 18 qui est le nombre qu'on a divisé par 6. En général on peut dire que si on multiplie le quotient par le diviseur, ou le diviseur par le quotient, le produit est égal au dividende: car selon la notion de la division, le quotient marque combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende; par conséquent en prenant le diviseur autant de fois qu'il est marqué par le quotient, l'on doit avoir une grandeur égale au dividende, ou plutôt on doit avoir le dividende même. Or prendre le diviseur autant de fois qu'il est marqué par le quotient, c'est multiplier le diviseur par le quotient. Donc si on multiplie le diviseur par le quotient, le produit est le dividende même. Cette remarque servira à entendre ce que nous dirons dans la suite.

Il y a deux sortes de divisions algébriques, sçavoir, celle des quantitez incomplexes, & celle des quantitez complexes.

DE LA DIVISION DES QUANTITEZ incomplexes.

Nous avons dit qu'il y a trois regles à observer dans la multiplication des quantitez incomplexes. Il y en a de même trois dans la division qui répondent à celles de la multiplication. La premiere regarde les signes de plus & de moins du dividende & du diviseur. La seconde est pour les coefficiens; & la troisiéme pour les lettres.

164. I. REGLE. Lorsque le dividende & le diviseur ont tous les deux le signe +, on doit mettre + au quotient. Si un des deux a le signe — & l'autre +, on mettra — au quotient. Enfin lorsque le dividende & le

diviſeur ont tous les deux le ſigne —, on doit mettre + au quotient. On peut réduire les trois cas de cette regle à deux ſeulement, en diſant que quand les ſignes du diviſeur & du dividende ſont ſemblables, il faut mettre + au quotient, & quand ils ſont différens, il faut mettre —.

165. II. REGLE. On diviſe les coefficiens comme tous les autres nombres; mais il faut ſe ſouvenir que quand une grandeur n'a pas de coefficient marqué, on ſuppoſe toûjours qu'elle a l'unité pour coefficient. Voici des exemples de cette ſeconde regle : ſi on veut diviſer $12ab$ par $3a$, il faudra écrire 4 pour coefficient du quotient; parce que 3 eſt contenu quatre fois dans 12. Pareillement $5ab$ diviſé par a, donne 5 pour coefficient du quotient, parce que 1 qui eſt le coefficient du diviſeur eſt contenu 5 fois dans 5.

166. III. REGLE. Cette troiſiéme regle qui eſt celle des lettres, conſiſte à effacer les lettres communes au dividende & au diviſeur, après quoi ce qui reſte au dividende eſt le quotient de la diviſion, pourvû que le diviſeur ſoit entierement effacé : par exemple, le quotient de ab diviſé par a eſt b, parce qu'après avoir effacé a qui eſt une lettre commune au dividende & au diviſeur, il reſte b dans le dividende. Pareillement a^5b^2, ou $aaaaabb$ diviſé par a^3b ou $aaab$ donne au quotient aab, parce qu'après avoir effacé a^3b dans le dividende, il reſte aab. Voici differens exemples où les trois regles ſont appliquées.

I. $\frac{+12a^2x}{+12a} = ax$ II. $\frac{+20ab^3}{-4ab} = -5b^2$

III. $\frac{-30adx}{+6ax} = -5d$ IV. $\frac{-28a^4b^5}{-7a^4b^3} = 4b^2$

REMARQUES.

I.

167. Si le dividende & le diviſeur étoient une même quantité, le quotient ſeroit l'unité. Exemples.

$$\frac{a}{a}=1.\quad\frac{a^3b}{a^3b}=1.\quad\frac{-5a^2b^4}{+5a^2b^4}=-1.$$ La raiſon de cette remarque eſt que le quotient exprime combien de fois le diviſeur eſt contenu dans le dividende. Or toute grandeur eſt contenuë une fois dans elle-même ; & par conſéquent l'unité eſt le quotient d'une quantité diviſée par elle-même.

II.

168. S'il reſte encore quelque choſe au diviſeur après avoir effacé les lettres communes au diviſeur & au dividende, alors la diviſion ne peut ſe faire exactement : par exemple, on ne peut faire la diviſion de a^2b par ac, ni celle de a^3b^4 par a^4b ; parce qu'après avoir effacé les lettres communes au diviſeur & au dividende, il reſte c au diviſeur du premier exemple, & a au diviſeur du ſecond. Dans ces cas on ſe contente d'indiquer la diviſion en cette maniere,

$$\frac{a^2b}{ac}\ \&\ \frac{a^3b^4}{a^4b}$$ ou bien, $$\frac{ab}{c}\ \&\ \frac{b^3}{a},$$ en effaçant les lettres communes. Pareillement ſi le dividende & le diviſeur n'avoient aucune lettre commune, on indiqueroit la diviſion de la même maniere : ainſi pour marquer la diviſion de a bar b, on écrit $\frac{a}{b}$.

III.

169. Quand il ſe trouve une même lettre dans le dividende & dans le diviſeur, alors pour faire la diviſion on ôte l'expoſant du diviſeur de l'expoſant du dividende.

Exemples. $\frac{a^5}{a^2}=a^{5-2}=a^3$ $\frac{a^3}{a}=a^{3-1}=a^2$. Cette

remarque qui suit évidemment de la troisiéme regle, répond à une autre remarque que nous avons faite sur la multiplication en pareil cas *, & dans laquelle nous avons dit qu'il falloit ajoûter les exposans de la lettre commune au multiplicande & au multiplicateur. * 155.

170. La premiere regle * qui est celle des signes, est fondée sur ce que le produit du diviseur par le quotient, doit être le même que le dividende. Or afin que ce produit ne differe pas du dividende, il est nécessaire d'observer la regle que nous avons proposée : car, par exemple, si le dividende ayant le signe +, & le diviseur le signe —, on mettoit + au quotient, il est évident qu'en multipliant le diviseur qu'on suppose avoir le signe — par le quotient qui auroit le signe +, le produit devroit avoir —, parce que — × + donne — ; par conséquent le signe du produit seroit different de celui du dividende : ce qui est impossible. * 164.

171. La seconde regle qui est celle des coefficiens ne renferme aucune difficulté particuliere : car les coefficiens étant des nombres, il est clair qu'on doit opérer sur eûx comme on fait dans la division des autres nombres.

172. La troisiéme regle est encore une suite de la remarque que nous avons faite en disant que le produit du diviseur par le quotient, ou du quotient par le diviseur, est la même grandeur que le dividende : car la multiplication du quotient par le diviseur se fait en écrivant le diviseur à côté du quotient ; & par conséquent, afin que le produit de cette multiplication ne differe pas du dividende, il faut qu'en faisant la division on ait effacé dans le dividende les lettres qui sont aussi dans le diviseur. En un mot, dans la division on efface du dividende les lettres qui se trouvent dans le diviseur ; & le reste est le quotient : au contraire dans la multiplication du quotient par le diviseur, on remet dans le quotient les lettres du diviseur qui

avoient été effacées ; ainsi le produit de cette multiplication est la même grandeur que le dividende : par exemple si on divise *abc* par *bc*, on efface *bc* du dividende *abc*, & il reste *a* pour quotient : & dans la multiplication du quotient *a* par le diviseur *bc*, on remet *bc* avec *a* ; & par conséquent le produit est la même grandeur que le dividende.

DE LA DIVISION DES QUANTITEZ complexes.

173. Si le dividende est complexe & le diviseur incomplexe, voici les opérations qu'il faut faire afin de pratiquer la division.

1°. Diviser le premier terme du dividende par le diviseur, en observant les trois regles prescrites pour la division des quantitez incomplexes ; & ensuite écrire le quotient à part.

2°. Multiplier le diviseur par le terme qu'on vient d'écrire au quotient.

3°. Soustraire le produit qui est venu de la multiplication, le soustraire, dis-je, du dividende : ce qui se fait en changeant le signe du produit.

4. Enfin faire la réduction des termes semblables qui se présentent après la soustraction.

Ces quatre opérations doivent être appliquées sur les autres termes du dividende successivement. De ces quatre opérations les trois premieres ont lieu dans la division des nombres, il n'y a que la quatriéme qui soit particuliere à la division algébrique.

EXEMPLE.

Soit la quantité $4a^5b^4 - 6a^3b^2 + 2a^2b^3$ à diviser par $2a^2b$.

Ayant écrit le diviseur à la droite du dividende & tiré une ligne au-dessous de l'un & de l'autre, ayant aussi tiré une seconde ligne qui sépare le dividende du diviseur comme on le voit :

$$\begin{array}{ccc|l} 4a^5b^4 & -6a^3b^2 & +2a^2b^3 & 2a^2b \\ 0 & 0 & 0 & \\ \hline -4a^5b^4 & +6a^3b^2 & -2a^2b^3 & 2a^3b^3-3ab+b^2 \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

1°. Je divise le premier terme $4a^5b^4$ du dividende par le diviseur $2a^2b$, le quotient est $2a^3b^3$; j'écris donc le quotient $2a^3b^3$ sous le diviseur, comme il paroît dans cet exemple. 2°. Je multiplie le diviseur $2a^2b$ par le quotient $2a^3b^3$, le produit est $+4a^5b^4$. 3°. Je soustrais ce produit du dividende en écrivant $-4a^5b^4$ sous le terme semblable $4a^5b^4$. 4°. Enfin je fais la réduction, en effaçant les deux termes $4a^5b^4-4a^5b^4$ qui se détruisent. (Au lieu d'effacer les termes, on a mis au-dessous un zero pour la commodité de l'impression.)

Je fais ensuite les quatre mêmes opérations sur le second terme $-6a^3b^2$ du dividende, & après sur le troisiéme $+2a^2b^3$. La division étant achevée, on trouvera que le quotient entier sera $2a^3b^3-3ab+b^2$.

174. Lorsque le diviseur est une quantité complexe aussi-bien que le dividende, on fait les quatre mêmes opérations sur le premier membre du dividende ; & si après la réduction il y a encore des termes qui ne soient pas effacez dans le dividende, on fait aussi les quatre opérations sur les termes du dividende qui n'ont pas été effacez dans la réduction, & on continuë de même jusqu'à ce qu'il ne reste plus rien dans le dividende, si cela est possible.

175. Il faut remarquer qu'en faisant la premiere des quatre opérations qui est la division, on ne se sert que du premier terme du diviseur : mais dans la seconde opération, on multiplie tous les termes du diviseur par celui qu'on a écrit au quotient, en faisant la premiere opération ; & tous les termes du produit doivent être soustraits du dividende. On entendra cela par un exemple.

EXEMPLE I.

Soit la quantité $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ à diviser par $a^2 - 2ab + b^2$. Après avoir disposé ces deux quantitez comme dans l'exemple précedent.

$$
\begin{array}{llll|l}
a^3 & -3a^2b & +3ab^2 & -b^3 & a^2 - 2ab + b \\
\circ & \circ & \circ & \circ & \\
\hline
-a^3 & +2a^2b & -ab^2 & & a - b \\
\circ & \circ & \circ & & \\
 & -a^2b & +2ab^2 & & \\
 & \circ & \circ & & \\
 & +a^2b & -2ab^2 & +b^3 & \\
 & \circ & \circ & \circ &
\end{array}
$$

Je divise d'abord le premier terme a^3 du dividende par le premier terme a^2 du diviseur, & j'écris a au quotient. 2°. Je multiplie le diviseur entier par le quotient a. 3°. Je soustrais du dividende le produit $a^3 - 2a^2b + ab^2$: ce qui se fait en changeant les signes & en écrivant $-a^3 + 2a^2b - ab^2$ sous les termes semblables du dividende. 4°. Je fais la réduction après laquelle je trouve que le reste du dividende est $-a^2b + 2ab^2 - b^3$.

Il faut faire sur ce reste les quatre mêmes opérations. Je divise donc 1°. le premier terme $-a^2b$ par le premier terme a^2 du diviseur, & j'écris le quotient $-b$ à la suite du terme a que j'ai déja trouvé. 2°. Je multiplie le diviseur entier par $-b$. 3°. Je soustrais le produit en changeant les signes, & en écrivant $+a^2b - 2ab^2 + b^3$ sous les termes semblables. 4°. Je fais la réduction, après laquelle il ne reste plus rien; & par conséquent la division est achevée, & le quotient est $a - b$.



EXEMPLE II.

$$\begin{array}{l|l} 12a^2 - 8ab - 15ac + 10bc & 3a - 2b \text{ diviseur.} \\ \ \ 0 \quad\ \ 0 \quad\ \ 0 \quad\ \ 0 & \\ \hline -12a^2 + 8ab + 15ac - 10bc & 4a - 5c \text{ quotient.} \\ \ \ 0 \quad\ \ 0 \quad\ \ 0 \quad\ \ 0 & \end{array}$$

En pratiquant la méthode dont on s'eſt ſervi dans l'exemple précedent, on trouvera que le quotient eſt $4a - 5c$.

Après avoir fait les exemples précedens une ou pluſieurs fois, il eſt bon d'en faire quelques autres que l'on choiſira de la maniere ſuivante : Il faut prendre deux quantitez algébriques complexes que l'on multipliera l'une par l'autre : & ſi on diviſe le produit de cette multiplication par une des grandeurs que l'on a multipliées, on doit trouver l'autre au quotient.

176. Lorſque l'on veut voir ſi on ne s'eſt pas trompé en faiſant la diviſion, on multiplie le diviſeur entier par le quotient entier ; & ſi le produit de cette multiplication eſt égal au dividende, c'eſt une marque qu'on a trouvé le veritable quotient : mais ſi le produit eſt different du dividende, la diviſion n'a pas été bien faite. Cela a été prouvé ailleurs *. * 83.

177. Nous ne nous arrêterons pas davantage à expliquer la diviſion des quantitez complexes, d'autant que cela n'eſt pas néceſſaire pour entendre les Elemens de Géométrie. Nous remarquerons cependant qu'il arrive ſouvent qu'on ne peut faire une diviſion ſans reſte : par exemple, ſi on vouloit diviſer $ab + ac - b^2 - bc + bd$ par $a - b$, la diviſion ne pourroit ſe faire exactement, c'eſt-à-dire, ſans reſte. Dans ce cas on ſe contente d'écrire le diviſeur au-deſſous du dividende en cette maniere, $\dfrac{ab + ac - b^2 - bc + bd}{a - b}$;

ou bien on fait la division en partie, & on écrit ensuite le diviseur au-dessous du reste du dividende : ainsi dans l'exemple proposé, on trouve d'abord pour quotient $b+c$, & il reste $+bd$, au-dessous duquel il faut écrire le diviseur. Le quotient entier de cette division est donc $b+c+\frac{bd}{a-b}$

DES PUISSANCES ET DES RACINES des quantitez.

178. La *puissance* d'une grandeur est le produit de cette grandeur multipliée par l'unité ou par elle-même une fois, deux fois, trois fois, &c. De là viennent la premiere, la seconde, la troisiéme, & la quatriéme puissance, &c.

179. La *premiere puissance* d'une grandeur est le produit de cette grandeur multipliée par l'unité ; d'où il suit que la premiere puissance d'une quantité est la quantité elle-même ; parce que le produit d'une grandeur par l'unité n'est pas different de la grandeur même ; ainsi la premiere puissance de 3 est 3 ; celle de a est a ; celle de ab est ab.

180. La *seconde puissance* qu'on appelle plus ordinairement *quarré*, est le produit d'une grandeur par elle-même : par exemple, 9 est le quarré de 3, parce que 9 est le produit de 3 par 3. 16 est le quarré de 4, parce que 16 est le produit de 4 par 4. aa ou a^2 est le quarré de a, parce que a^2 est le produit de a par a.

181. La *troisiéme puissance* qu'on appelle plus ordinairement *cube*, est le produit de la seconde puissance multipliée par la premiere. La quatriéme puissance est le produit de la troisiéme multipliée par la premiere. La cinquiéme puissance est le produit de la quatriéme multipliée par la premiere. La sixiéme est le produit de la cinquiéme multipliée par la premiere. La sep-

tiéme eſt le produit de la ſixiéme multipliée par la premiere ; ainſi de ſuite. Voici des exemples. La troiſiéme puiſſance ou le cube de 3 eſt 27, produit de la ſeconde puiſſance 9 par la premiere 3. La quatriéme puiſſance de 3 eſt 81, produit de 27 par 3. La cinquiéme puiſſance de 3 eſt 243, produit de 81 par 3. De même la troiſiéme puiſſance ou le cube de 4 eſt 64, produit de la ſeconde puiſſance 16 par la premiere 4. La quatriéme puiſſance de 4 eſt 256, produit de 64 par 4. La cinquiéme puiſſance de 4 eſt 1024, produit de 256 par 4. Pareillement la troiſiéme puiſſance de a eſt a^3, produit de la ſeconde puiſſance a^2 par la premiere a. La quatriéme puiſſance de a eſt a^4, produit de a^3 par a. La cinquiéme puiſſance de a eſt a^5, produit de a^4 par a, &c.

182. Remarquez qu'aucune des puiſſances de 1 ne differe de la premiere. Ainſi le quarré de 1 eſt 1 ; le cube de 1 eſt 1 ; la quatriéme puiſſance eſt 1, ainſi de ſuite. Cela vient de ce qu'en multipliant 1 par 1 le produit eſt toûjours 1.

183. La grandeur qu'il faut multiplier par l'unité ou par elle-même, afin d'avoir ſes differentes puiſſances eſt appellée *racine* de ces puiſſances : par exemple, 3 eſt la racine de 9, de 27 & de 81. 4 eſt la racine de 16 & de 64. a eſt celle de a^2, de a^3, de a^4, de a^5, &c.

184. Une racine prend differens noms ſelon les puiſſances dont elle eſt la racine. La racine de la premiere puiſſance eſt appellée racine premiere. Celle de la ſeconde eſt appellée racine ſeconde, & plus ſouvent racine quarrée. Celle de la troiſiéme puiſſance, racine troiſiéme, & plus ſouvent racine cubique. Celle de la quatriéme puiſſance eſt appellée racine quatriéme ; ainſi de ſuite. Exemples. 3 eſt la racine premiere de 3, la racine ſeconde ou quarrée de 9, la racine troiſiéme ou cubique de 27, la racine quatriéme de 81. Pareillement a eſt la ra-

cine premiere de a, la racine quarrée de a^2, la racine cubique de a^3, la racine quatriéme de a^4, la cinquiéme de a^5, &c.

185. Remarquez que la premiere puissance & la racine premiere d'une grandeur sont la même chose; parce que l'une & l'autre sont la grandeur elle-même : par exemple, la premiere puissance de a est a, & la racine premiere de a est aussi a. La premiere puissance de 4 est 4, & la racine premiere de 4 est aussi 4.

186. Remarquez encore que lorsqu'il s'agit d'un quarré & qu'on parle de sa racine, il faut toûjours entendre la racine quarrée. De même quand il s'agit d'un cube si on parle de sa racine, on doit entendre la racine cubique. Il en est de même des autres puissances.

187. Pour marquer la racine d'une grandeur, on met le signe $\sqrt{}$ avant cette grandeur, & on écrit au dessus du signe le chiffre qui marque la racine que l'on veut désigner : par exemple, $\sqrt[3]{a}$ marque la racine troisiéme de a. $\sqrt[2]{ab}$ marque la racine seconde ou quarrée de ab. Il faut prendre garde que quand le signe radicale se trouve sans chiffre écrit au-dessus, il exprime toûjours la racine quarrée; ainsi $\sqrt{ab}$ marque la racine quarrée de ab aussi-bien que $\sqrt[2]{ab}$.

On se sert aussi du même signe pour désigner la racine des quantitez complexes : par exemple,

$\sqrt[2]{a^2+2ab+b^2}$ exprime la racine seconde de la quantité $a^2+2ab+b^2$. La ligne tirée au-dessus de la quantité, marque que l'on veut désigner la racine de la quantité entiere qui se trouve sous cette ligne.

188. Quand on parle de la racine quelconque, troisiéme, quatriéme, cinquiéme d'une grandeur, il faut toûjours concevoir que cette grandeur est une puissance semblable : par exemple, si on parle de la racine troisiéme

troiſiéme de a, il faut concevoir que a eſt la troiſiéme puiſſance de la racine dont on parle. S'il s'agit de la racine quarrée de ab, il faut regarder ab comme un quarré.

189. Pour élever une grandeur à une puiſſance, il faut multiplier cette grandeur par elle-même autant de fois moins une qu'il y a d'unitez dans l'expoſant de la puiſſance. Ainſi afin d'élever une grandeur à la quatriéme puiſſance, il faut multiplier la grandeur par elle-même quatre fois moins une, c'eſt-à-dire, trois fois, parce que 4 eſt l'expoſant de la quatriéme puiſſance. Pareillement ſi on veut élever une grandeur à la ſixiéme puiſſance, il faut la multiplier par elle-même ſix fois moins une, c'eſt-à-dire, 5 fois. Exemples. Pour élever 5 à la quatriéme puiſſance, je multiplie d'abord 5 par lui-même, c'eſt-à-dire, par 5; cette premiere multiplication donne 25 qui eſt la ſeconde puiſſance de 5; je multiplie enſuite 25 par 5; cette ſeconde multiplication donne 125 qui eſt la troiſiéme puiſſance de 5; enfin je multiplie 125 par 5; cette troiſiéme multiplication donne 625 qui eſt la quatriéme puiſſance de 5. Pour élever ab à la troiſiéme puiſſance, je multiplie d'abord ab par ab; cette premiere multiplication donne a^2b^2 qui eſt la ſeconde puiſſance de ab; après quoi je multiplie a^2b^2 par ab: cette ſeconde multiplication donne a^3b^3; ce dernier produit eſt la troiſiéme puiſſance de ab.

Cette regle pour élever une grandeur à une puiſſance quelconque, eſt fondée ſur les définitions qu'on a données des differentes puiſſances; car ſuivant ces définitions, il paroît d'abord que pour avoir la ſeconde puiſſance, il ne faut faire qu'une multiplication, puiſque la ſeconde puiſſance eſt le produit d'une grandeur multipliée par elle-même. 2°. Quand on a la ſeconde puiſſance, il ne faut plus faire qu'une multiplication, afin d'avoir la troiſiéme; parce que la

troisiéme puissance est le produit de la seconde par la premiere ; par conséquent il ne faut faire en tout que deux multiplications pour avoir la troisiéme puissance. On prouvera de même, que pour la quatriéme puissance, il ne faut que trois multiplications : parce que la troisiéme puissance étant une fois trouvée, il ne faut plus qu'une multiplication, afin d'avoir la quatriéme, & ainsi de suite.

190. La regle qu'on vient de donner est commune aux quantitez incomplexes, & à celles qui sont complexes : par exemple si on cherche les differentes puissances de $a+b$, on trouvera après les réductions faites que la seconde puissance est $a^2+2ab+b^2$; que la troisiéme puissance est $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; que la quatriéme est $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.

194. Il faut bien prendre garde quels sont les produits qui entrent dans la composition du quarré d'une quantité complexe : nous allons en faire l'énumeration : le quarré d'une quantité complexe renferme donc 1°. Celui du premier terme. 2°. Le quarré des deux premiers termes contient de plus le double du premier multiplié par le second, avec le quarré du second. 3°. Le quarré des trois premiers termes contient de plus les produits suivans : sçavoir, le double des deux premiers termes multiplié par le troisiéme avec le quarré du troisiéme. 4°. Le quarré des quatre premiers termes contient encore de plus le double des trois premiers termes multiplié par le quatriéme avec le quarré du quatriéme. 5°. Le quarré des cinq premiers termes contient encore de plus le double des quatre premiers termes multiplié par le cinquiéme avec le quarré du cinquiéme, ainsi de suite : soit, par exemple, la quantité complexe $c+d+f+g+h$; on trouvera que le quarré de cette quantité est $c^2+2cd+d^2$; $+2cf+2df+ff$; $+2cg+2dg+2fg+g^2$; $+2ch+2dh+2fh+2gh+h^2$.

Or ce quarré renferme tous les produits que nous venons de marquer : car c^2 eſt celui qui eſt indiqué dans le premier article ; $+2cd+dd$, ſont les produits marquez dans le ſecond article ; $2cf+2df+f^2$ ſont ceux qui ſont énoncez dans le troiſiéme article ; $2cg+2dg+2fg+g^2$, ſont marquez dans le quatriéme : enfin les autres produits qui reſtent, ſont énoncez dans le cinquiéme article.

195. Les quarrez de toutes les quantitez complexes peuvent être repreſentez par $a^2+2ab+b^2$ qui eſt le quarré de $a+b$. S'il s'agit, par exemple, du quarré de $c+d$, il pourra être repreſenté par $a^2+2ab+b^2$, pourvû que l'on conçoive que a eſt égal à c, & que b eſt égal à d. Le même quarré pourra repreſenter celui de $c+d+f$, ſi on conçoit a égal à $c+d$, & b égal à f. Par la même raiſon le quarré de $a+b$ repreſentera celui de $c+d+f+g$, ſi on ſuppoſe a égal à $c+d+f$, & b égal à g. En général le quarré de $a+b$ répreſentera celui de toutes ſortes de quantitez complexes, pourvu que l'on ſuppoſe a égal à tous les termes de cette quantité, excepté le dernier, & b égal à ce dernier terme. Ainſi $a^2+2ab+b^2$ eſt une *formule*, c'eſt-à-dire, une expreſſion générale qui peut déſigner tous les quarrez poſſibles des grandeurs complexes, même ceux des nombres ; car les nombres marquez par pluſieurs chiffres peuvent être conſiderez comme des quantitez complexes : par exemple 5463 eſt égal à $5000+400+60+3$, & par conſéquent c'eſt une quantité complexe de quatre termes.

196. L'opération par laquelle on éleve une quantité à quelque puiſſance, eſt appellée *formation des puiſſances* : après en avoir donné la regle, nous allons parler d'une autre opération oppoſée, qu'on appelle *réſolution des puiſſances*, & plus ſouvent *extraction des racines* : elle conſiſte à chercher la racine d'une quantité propoſée : par exemple, ſi ayant le nombre 100, j'en

tire la racine quarrée qui eſt 10, cela s'appelle extraire la racine de 100. On peut faire l'extraction de la racine ſeconde, troiſiéme, quatriéme, cinquiéme, &c. tant ſur les nombres que ſur les quantitez litterales. Nous ne parlerons ici que de l'extraction de la racine quarrée, parce qu'elle eſt la ſeule dont nous aurons beſoin dans la ſuite.

De l'extraction de la Racine quarrée des nombres.

197. Afin de tirer la racine quarrée d'un nombre, il faut d'abord partager ce nombre en tranches, en commençant vers la droite; en ſorte que chaque tranche contienne deux chiffres, excepté la premiere à gauche qui peut n'en contenir qu'un ſeul : ce partage en tranches ſe fait, en écrivant une virgule entre-deux : par exemple, ſi on vouloit extraire la racine quarrée de ce nombre 5412 3786, il faudroit tirer une virgule entre 8 & 7, une autre entre 3 & 2, & une troiſiéme entre 1 & 4 en cette maniere 54, 12, 37, 86. Il paroît aſſez que ſi le nombre des chiffres eſt impair, la premiere tranche à la gauche ne contiendra qu'un ſeul caractere : ainſi ſi le nombre propoſé étoit 4123786, la premiere tranche à la gauche ne contiendroit que 4, la ſeconde 12, la troiſiéme 37, la quatriéme 86.

Pour tirer la racine quarrée, nous nous ſervirons de la formule $a^2+2ab+b^2$ qui eſt le quarré de $a+b$; & afin que l'on entende comment elle peut ſervir pour faire l'extraction de la racine quarrée, nous mettrons ici les remarques ſuivantes.

I.

198. La lettre a de la formule déſigne pour chaque tranche qui ſuit la premiere le chiffre ou les chiffres de la racine que l'on a déja trouvés, & la lettre b repréſente celui que l'on cherche. Ainſi quand on opere ſur la ſeconde tranche, a déſigne le premier chiffre de la racine, lequel vient de la premiere tranche, & b

repréſente le ſecond que l'on cherche. Si on opére ſur la troiſiéme tranche, a marque les deux premiers chiffres de la racine que l'on a déja trouvés, & b exprime le troiſiéme. Si on opére ſur la quatriéme tranche, a repréſente les trois premiers chiffres de la racine déja trouvés, & b déſigne le quatriéme que l'on cherche, ainſi de ſuite.

II.

199. Comme l'extraction de la racine eſt une eſpece de diviſion, il y a un nombre qui doit ſervir de diviſeur : mais il n'eſt pas le même pour toutes les tranches. Il eſt toûjours déſigné par $2a$, qui eſt la premiere partie de $2ab$ ſecond terme de la formule. Or $2a$ ſignifie le double des chiffres qu'on a déja trouvés à la racine.

III.

200. Le premier terme a^2 de la formule ne ſert que pour la premiere tranche, & marque qu'il faut ſouſtraire de cette tranche le quarré du premier chiffre de la racine. Les deux autres $2ab+b^2$ ſervent pour chacune des autres tranches, & font connoître qu'il faut ſouſtraire de chacune deux produits qui ſont pour la ſeconde tranche le double du premier chiffre de la racine multiplié par le ſecond ; plus le quarré de ce ſecond chiffre : pour la troiſiéme tranche ces deux produits ſont le double des deux premiers chiffres de la racine multiplié par le troiſiéme, plus le quarré de ce troiſiéme. Pour la quatriéme tranche les deux produits ſont le double des trois premiers termes de la racine multiplié par le quatriéme, plus le quarré de ce quatriéme. Ainſi de ſuite comme il eſt marqué dans l'art. 194. Revenons préſentement à la pratique.

Après avoir partagé le nombre en tranches de deux chiffres chacune, on peut tirer une ligne au-deſſous & la couper par un crochet comme dans la diviſion. Ces préparations étant faites, on doit opérer ſur la premiere tranche.

201. Il faut 1°. Chercher le plus grand quarré contenu dans la premiere tranche à gauche : il ne peut être plus grand que celui de 9, parce que le quarré de 10 contient trois chiffres. 2°. Prendre la racine de ce quarré, & l'écrire à la droite du nombre proposé. 3°. Soustraire de la premiere tranche le plus grand quarré qui y est contenu, & écrire le reste au-dessous. Le quarré qu'il faut ôter de la premiere tranche est désigné par a^2 de la formule.

EXEMPLE I.

$$\begin{array}{r|l} 20,92,54 & 45 \\ \hline 492 & 8 = 2a \\ \dot{} & \\ 425 & \\ \hline 67 & \end{array}$$

Soit, par exemple, le nombre 209254 dont on cherche la racine quarrée. Après l'avoir partagé en tranches, 1°. Je cherche quel est le plus grand quarré contenu dans 20, qui est la premiere tranche à gauche : c'est 16. 2°. J'en prends la racine 4, & je l'écris à la droite du nombre proposé. 3°. Je soustrais le quarré 16 de la premiere tranche, & j'écris le reste 4 au-dessous. Ces trois opérations étant faites, il faut appliquer les regles suivantes sur la seconde tranche.

202. 1°. Abbaisser cette seconde tranche à côté du reste de la premiere, & mettre un point sous le premier chiffre de la tranche abaissée, pour marquer que ce chiffre, joint avec le reste de la premiere tranche, est le dividende : dans l'exemple proposé, j'abbaisse la seconde tranche 92 à côté du 4 qui est le reste de la premiere, & je mets un point sous le premier chiffre 9, pour marquer que 49 est le dividende.

203. 2°. Prendre pour diviseur le double de ce qui a déja été trouvé à la racine, & l'écrire sous cette racine. Dans notre exemple, ayant déja trouvé 4 à la racine, 8 sera le diviseur ; je l'écris donc sous 4. Ce diviseur 8 qui est le double de 4, est désigné par $2a$,

parce que a repréſente le chiffre 4 que l'on a mis à la racine.

204. 3°. Diviſer le dividende par le diviſeur en obſervant que quoique le chiffre éprouvé ſoit bon ſelon la diviſion, il ne doit pas être mis pour cela à la racine, à moins qu'il ne ſoit bon auſſi ſelon l'épreuve propre à l'extraction de la racine quarrée. Or cette épreuve conſiſte à ajoûter enſemble les produits marquez par $2ab+b^2$, c'eſt-à-dire, le produit du diviſeur par le chiffre éprouvé, & le quarré de ce chiffre éprouvé : & ſi la ſomme qui vient de cette addition peut être ôtée de la ſeconde tranche jointe au reſte de la premiere, c'eſt une marque que le chiffre éprouvé eſt bon ; auquel cas il faudra l'écrire à côté de celui qu'on a déja trouvé à la racine : mais ſi la ſomme qui eſt venuë de l'addition ne peut être ſouſtraite de la ſeconde tranche jointe au reſte de la premiere ; alors il faudra diminuer le chiffre éprouvé d'une unité, & recommencer l'épreuve avec le nouveau chiffre ; & ſi la ſomme eſt encore trop grande, on diminuera encore le chiffre éprouvé d'une unité, juſqu'à ce qu'on puiſſe faire la ſouſtraction.

205. Il faut remarquer que quand on veut ajoûter le quarré du chiffre éprouvé avec le produit du diviſeur par le chiffre éprouvé, le quarré doit être plus avancé d'un rang vers la droite que le produit du diviſeur. Cela vient de ce que dans le quarré total d'un nombre, le quarré de chaque chiffre a un rang de moins après lui, que le double des caracteres précedens multiplié par ce chiffre, comme nous le remarquerons enſuite, article 218.

Dans notre exemple, je diviſe 49 par 8, & je trouve que 6 eſt bon ſelon la diviſion, parce qu'en multipliant 8 par 6, le produit 48 peut être ôté du dividende 49 : je fais enſuite l'épreuve pour la racine quarrée, c'eſt-à-dire, que j'ajoûte 36 quarré du chiffre

éprouvé avec 48, en obſervant ce qui eſt dit dans la remarque, & je trouve la ſomme 516, laquelle ne peut être otée de 492; & par conſéquent le 6 n'eſt pas bon. Ainſi j'éprouve 5 en multipliant le diviſeur 8 par 5, & ajoûtant le quarré de 5 au produit; la ſomme eſt 425, laquelle peut être ôtée de 492; ainſi le 5 eſt bon; c'eſt pourquoi je l'écris à la racine à côté du 4.

206. 4°. Après avoir écrit à la racine le chiffre éprouvé qui a été trouvé bon, il faut faire la ſouſtraction dont on a parlé dans la troiſiéme regle, c'eſt-à-dire, que la ſomme du produit du diviſeur par le chiffre éprouvé, & du quarré du chiffre éprouvé, doit être ôtée de la ſeconde tranche jointe au reſte de la premiere. Dans notre exemple, je ſouſtrais 425 de 492, & j'écris le reſte 67 au-deſſous.

207. On opere de la même maniere ſur la troiſiéme tranche que ſur la ſeconde. Ainſi ayant abbaiſſé la troiſiéme tranche, à côté du reſte de la derniere ſouſtraction, 1°. On met un point ſous le premier chiffre de la troiſiéme tranche pour marquer que ce premier chiffre, joint avec le reſte de la ſouſtraction, eſt le dividende. 2°. On prend pour diviſeur le double des deux chiffres qui ſont déja à la racine, & on l'écrit au-deſſous du premier diviſeur. 3°. On fait la diviſion en employant d'abord l'épreuve de la diviſion, & enſuite celle de l'extraction de la racine quarrée. 4°. Après avoir trouvé le chiffre qu'on doit mettre à la racine, il faut faire la ſouſtraction. On opere encore de la même maniere ſur chacune des tranches ſuivantes.



20, 92, 54	457	
492	8=2 4	
•	90=2 4	
425		
6754		
•		
6349		
405		

Dans l'exemple proposé, j'abbaisse la troisiéme tranche à côté de 67, reste de la soustraction précedente, il vient 6754: après cela, 1°. Je mets un point sous 5, pour marquer que 675 est le dividende. 2°. Je prends pour diviseur le double de ce qui est déja à la racine, c'est-à-dire, le double de 45, & j'écris le second diviseur 90 sous le premier. 3°. Je divise le dividende 675 par 90; & je trouve que le 7 est bon selon la division, parce que 630 produit du diviseur 90 par 7 est moindre que 675 : ensuite pour voir s'il est bon selon l'épreuve de l'extraction de la racine, j'ajoûte le quarré du 7 au produit 630 de la maniere qui a été expliquée, * & je trouve la somme 6349 qui est moindre que 6754; ainsi le 7 est bon, je le mets donc à la racine. 4°. Enfin je retranche 6349 de 6754, il reste 405. Comme il n'y a plus de tranches à abbaisser, l'opération est finie. * 205.

208. On distingue différens membres dans l'extraction de la racine comme dans la division; le premier membre est la premiere tranche; le second membre est la seconde tranche jointe au reste de la premiere soustraction; le troisiéme membre est la troisiéme tranche jointe au reste de la seconde soustraction, ainsi de suite. Dans notre exemple, 20 est le premier membre, 492 est le second, 6754 est le troisiéme.

S'il n'y avoit point de reste après une soustraction, alors la tranche suivante seroit seule le membre sur lequel il faudroit opérer : cela paroîtra dans le troisiéme exemple, où la seconde tranche seule est le second membre.

209. Remarquez qu'en cherchant les chiffres de la racine, on peut également se tromper, ou en prenant

un chiffre trop grand, ou en prenant un chiffre trop petit. On évite la premiere erreur, en s'assûrant que la somme du produit du diviseur, par le chiffre éprouvé & du quarré de ce chiffre, peut être retranchée du membre sur lequel on opere : mais pour éviter la seconde erreur, il ne suffit pas que la soustraction, dont on vient de parler, se puisse faire : ainsi, si on avoit mis 4 ou 3 à la racine à la place du 5, pour le second membre de l'exemple précedent, on auroit fait une faute, quoiqu'on ait pû faire alors la soustraction marquée dans l'article 206.

Afin donc que l'on soit assûré que le chiffre éprouvé n'est pas trop petit, il faut éprouver d'abord le chiffre que l'on à trouvé bon par l'épreuve de la division ; & si ce chiffre est trop grand, il faut le diminuer d'une unité, & recommencer l'épreuve propre à l'extraction de la racine ; que si ce dernier chiffre n'est point encore bon, il faut le diminuer d'une unité, & poursuivre la même pratique, jusqu'à ce que la soustraction marquée par l'article 206 puisse se faire, en observant de ne diminuer à chaque fois le chiffre éprouvé, que d'une unité seulement, lorsqu'on veut faire une nouvelle épreuve.

210. Remarquez encore que si le diviseur étoit plus grand que le dividende, ou bien si aucun chiffre positif ne se trouvoit bon en faisant l'épreuve de l'extraction de la racine, pour lors il faudroit mettre zero à la racine ; auquel cas il n'y auroit plus rien à faire sur le membre sur lequel on opére ; c'est pourquoi il faudroit abbaisser la tranche suivante, pour avoir un nouveau membre sur lequel on opéreroit à l'ordinaire.

EXEMPLE II.

Soit le nombre 31406857, dont il faut extraire la racine quarrée.

Je le partage d'abord en tranches, en commençant vers la droite ; enſuite après avoir tiré une ligne au-deſſous, & une à la droite, j'opére ſur la premiere tranche de la maniere ſuivante.

Premier Membre.

1°. Je cherche le plus grand quarré contenu dans 31 qui eſt la premiere tranche : c'eſt 25. 2°. Je prends la racine de ce quarré, & je l'écris à la droite du nombre propoſé. 3°. Je ſouſtrais le quarré 25 de le premiere tranche, & il reſte 6 ; enſuite je paſſe au ſecond membre.

31,40,68,57	5
640	$10 = 2a$

Second Membre.

Ayant abbaiſſé la ſeconde tranche à côté du reſte 6, je trouve 640 pour ſecond membre, ſur lequel j'applique les 4 regles preſcrites. 1°. Je mets un point ſous le 4, pour marquer que le dividende eſt 64. 2°. Je prends pour diviſeur le double du chiffre 5 qui eſt à la racine. 3°. Je diviſe 64 par le diviſeur 10, & je trouve que le 6 eſt bon ſelon l'épreuve de la diviſion & celle de l'extraction de la racine quarrée. Je fais cette derniere épreuve en multipliant le diviſeur 10 par 6, & en ajoûtant au produit 60 le quarré de 6, comme il eſt marqué dans l'article 205 : je trouve que la ſomme eſt 636, laquelle peut être ôtée du membre 640 ; je mets donc 6 à la racine. 4°. Enfin je retranche 636 de 640, & le reſte eſt 4. Après cela je paſſe au troiſiéme membre.

31,40,68,57	5604
640	$10 = 2a$
636	$112 = 2a$
46857	$1120 = 2a$
44816	
2041	

Troiſiéme Membre.

Ayant abbaiſſé la troiſiéme tranche 68 à côté du reſte 4, je trouve 468 pour le troiſiéme membre ſur lequel j'opere ainſi : 1°. Je mets un point ſous le pre-

mier chiffre 6 de la troisiéme tranche, pour marquer que 46 est le dividende. 2°. Je prends 112 pour diviseur, c'est le double du nombre 56 que l'on a déja trouvé à la racine, & j'écris ce second diviseur au-dessous du premier. 3°. Je divise 46 par 112; mais comme le diviseur est plus grand que le dividende, je mets o à la racine; ainsi il n'y a plus rien à faire sur ce membre, c'est pourquoi je passe au suivant.

Quatriéme Membre.

Ayant abbaissé la quatriéme tranche 57 à côté du reste 468, je trouve 46857 pour quatriéme membre, sur lequel j'applique les quatre regles. 1°. Je mets un point sous le premier chiffre 5 de la tranche abbaissée, pour marquer que le dividende est 4685. 2°. Je prends pour diviseur 1120, c'est le double du nombre 560 qui est déja à la racine, & j'écris ce troisiéme diviseur sous le second. 3°. Je divise 4685 par 1120, le quotient est 4; & ayant multiplié le diviseur 1120 par 4, je trouve le produit 4480 moindre que le dividende; ainsi le 4 est bon selon la division: je fais ensuite l'épreuve de l'extraction, en ajoûtant le quarré de 4 au produit 4480, & je trouve que la somme 44816 est moindre que le quatriéme membre; c'est pourquoi j'écris le 4 à la racine. 4°. Je soustrais la somme 44816 de 46857, le reste est 2041, & l'opération est achevée.

EXEMPLE III.

9,04,85,76	3008
04 85 76	6 = 2a
. . .	60 = 2a
4 80 64	600 = 2a
512	

Soit encore le nombre 9048576 dont on veut tirer la racine quarrée. Il faut d'abord le partager en 4 tranches, en commençant vers la droite: la premiere ne contiendra qu'un seul caractere, sçavoir 9. On opérera ensuite sur ce nombre, comme on a fait sur les autres, & on trouvera 1°. Que le premier chiffre de la

racine eſt 3 2°. Que le ſecond chiffre de la racine eſt 0, parce que le diviſeur 6 eſt plus grand que le dividende du ſecond membre, ce ſecond membre eſt la ſeconde tranche 04, & le dividende eſt 0. 3°. Que le troiſiéme chiffre de la racine eſt encore zero, parce que le diviſeur 60 eſt plus grand que le dividende du troiſiéme membre, ce troiſiéme membre eſt 485, & le dividende eſt 48. 4°. Que le quatriéme chiffre de la racine eſt 8, à cauſe qu'en opérant à l'ordinaire ſur le dernier membre 48576 & ſur le dividende 4857, on trouve que le 8 eſt bon.

On peut abbréger un peu cette méthode en ſupprimant l'addition du quarré du chiffre éprouvé avec le produit du diviſeur par le chiffre éprouvé. Pour cela il faut écrire ce chiffre à la ſuite du diviſeur, & multiplier par le même chiffre le diviſeur ainſi augmenté, le produit ſera égal à la ſomme qu'on auroit trouvée par l'addition preſcrite dans l'article 204. Nous allons faire l'application de cet abbregé au ſecond exemple : le diviſeur pour le ſecond membre eſt 10, & le chiffre éprouvé eſt 6 ; j'écris donc 6 à la ſuite de 10 ; ce qui donne 106 : enſuite je multiplie 106 par 6 ; & je trouve le produit 636 qui peut être ôté du ſecond membre 640 ; d'où je conclus que le 6 eſt bon. Quant au troiſiéme membre, le diviſeur 112 eſt plus grand que le dividende 46 ; ainſi il faut mettre un zero à la racine ; & il n'y a ni multiplication ni ſouſtraction à faire. Enfin pour le quatriéme membre le diviſeur eſt 1120, & le chiffre éprouvé eſt 4 que j'écris à la ſuite du diviſeur ; enſuite je multiplie par 4 le diviſeur augmenté 11204, le produit eſt 44816 qui peut être retranché du quatriéme membre 46857 : ainſi le 4 eſt bon. Il eſt viſible que le produit qu'on trouve par là, eſt néceſſairement égal à la ſomme preſcrite dans l'article 204 : ainſi cet abbregé ne change rien au fond de la méthode.

211. Pour faire la preuve de l'extraction de la racine quarrée, il faut chercher le quarré du nombre qu'on a trouvé à la racine, & y ajoûter le reste de la derniere soustraction. Ainsi dans le premier exemple, il faut élever 457 au quarré, c'est-à-dire, qu'il faut multiplier 457 par lui-même, & ensuite ajoûter le reste 405 au quarré 208849 : & comme la somme est égale au nombre proposé 209254 ; c'est une marque que l'opération a été bien faite ; mais si la somme n'avoit point été égale au nombre proposé, ç'auroit été une marque qu'on auroit fait quelque faute de calcul dans l'extraction de la racine. Lorsqu'il n'y a point de reste après la derniere soustraction, il faut, afin que l'opération soit bonne, que le quarré du nombre qu'on a trouvé à la racine, soit égal au nombre proposé.

La raison de cette pratique est évidente ; car puisqu'on cherche la racine, il faut, si l'on a bien operé, que le quarré du nombre qu'on a trouvé à la racine soit égal au nombre proposé, lorsqu'il n'y a point de reste après l'opération ; mais s'il y a un reste, il est clair que ce reste ajoûté au quarré de la racine, doit faire une somme égale au nombre proposé.

Afin qu'on entende les raisons sur lesquelles la méthode de l'extraction de la racine quarrée est fondée, nous allons encore faire quelques remarques sur la composition du quarré d'un nombre.

REMARQUES.

I.

212. Le quarré d'une quantité complexe contient le quarré du premier terme ; plus le double du premier terme multiplié par le second avec le quarré du second ; plus le double des deux premiers termes multiplié par le troisiéme avec le quarré du troisiéme ; plus le double des trois premiers termes multiplié par le quatriéme, avec le quarré du quatriéme ; ainsi de suite si la quantité complexe a plus de quatre termes *.

* 154.

II.

213. Tout nombre au-dessus de dix peut être consideré comme une quantité complexe composée d'autant de termes, qu'il y a de caracteres dans le nombre; par exemple, 7356 est une quantité complexe de quatre termes, puisque ce nombre est égal à 7000 +300+50+6. Par conséquent le quarré d'un nombre plus grand que 10, contient les produits énoncez dans la remarque précedente. Il y en a sept dans le quarré de 7356; sçavoir le quarré de 7 (on dit ici 7 & non pas 7000, parce que l'on ne prend que les chiffres positifs;) plus le double de 7 multiplié par 3, avec le quarré de 3; plus le double de 73 multiplié per 5, avec le quarré de 5; plus le double de 735 multiplié par 6, avec le quarré de 6.

III.

214. Si on fait attention aux deux premiers corollaires que nous avons déduits *, après avoir parlé de la multiplication des nombres qui contiennent des zeros à la fin, on verra que si on multiplie un nombre, par exemple, 7356, par lui-même, il y aura six rangs dans le quarré total après le quarré de 7, cinq rangs après le double de 7 multiplié par 3, quatre rangs après le quarré de 3, trois rangs après le double de 73 multiplié par 5, deux rangs après le quarré de 5, un rang après le double de 735 multiplié par 6 : enfin le quarré de 6 finira au dernier rang.

* 58. & 59.

Voici tous les produits placez dans les rangs qui leur conviennent : on a mis autant de points à la suite de chaque produit, qu'il y a de rangs après ce produit.

```
49......
 42.....
   9....
 730...
   25..
 8820.
     36
--------
54110736 quarré de 7356.
```

215. Il eſt encore clair par les deux mêmes corol-
* 58. laires * que le quarré d'un nombre doit avoir autant
& 59. de tranches, que ce nombre contient de caractéres, ni plus ni moins : par exemple, le quarré de 7356 contient quatre tranches ; car le quarré de 7 doit avoir après lui le double des rangs qui ſe trouvent après ce chiffre dans le nombre 7356, & par conſequent le quarré de 7 doit avoir trois tranches de deux rangs après lui : mais d'ailleurs le quarré de 7 fait encore une tranche ; ainſi le quarré de 7356 doit avoir quatre tranches. Cela peut encore ſe prouver de la maniere ſuivante ; 1°. Un nombre de quatre caractéres ne peut avoir moins de quatre tranches à ſon quarré : car le plus petit nombre de quatre caractéres eſt 1000. Or le quarré de 1000 eſt compoſé de quatre tranches, puiſque pour multiplier 1000 par 1000, il faut ajoûter les trois zeros du multiplicateur au multiplié. 2°. Un nombre de quatre caractéres ne peut avoir plus de quatre tranches à ſon quarré : car 9999 eſt le plus grand nombre de quatre caractéres. Or le quarré de 9999 ne peut avoir que quatre tranches : car 100000000, qui eſt le quarré de 10000, eſt le plus petit de tous les nombres des cinq tranches ; & par conſéquent le quarré de 9999, qui eſt moindre que celui de 10000, ne peut avoir que quatre tranches. Donc un nombre de quatre caractéres ne peut avoir plus de quatre tranches à ſon quarré ; d'ailleurs on vient de faire voir qu'il n'en peut avoir moins de quatre ; ainſi un nombre de quatre chiffres doit avoir préciſément quatre tranches à ſon quarré. On prouvera de la même maniere que le quarré de tout autre nombre a autant de tranches que le nombre a de chiffres.

En parlant de la racine quarrée, nous ſuppoſons toûjours que chaque tranche contient deux chiffres, excepté la premiere à gauche qui peut n'en contenir qu'un ſeul.

216. Il

216. Il ſuit de la troiſiéme remarque, que dans le quarré total de 7356, les differens produits doivent ſe trouver dans les rangs que nous allons marquer; 1°. le quarré de 7, dans le dernier rang de la premiere tranche; 2°. le double de 7 multiplié par 3, au premier rang de la ſeconde tranche; 3°. le quarré de 3, au ſecond rang de la même tranche; 4°. le double de 73 multiplié par 5, au premier rang de la troiſiéme tranche; 5°. le quarré de 5, au ſecond rang de la même tranche; 6°. le double de 735 multiplié par 6, au premier rang de la quatriéme tranche; 7°. enfin le quarré de 6, au ſecond rang de la même tranche.

217. Lorſqu'on dit que chacun de ces produits ſe trouve au premier ou au ſecond rang de quelqu'une des tranches, cela doit toûjours s'entendre du dernier chiffre de ces produits, comme il paroît par la maniere dont les produits du quarré de 7356 ont été placez après la troiſiéme remarque : par exemple, le premier produit 49 n'eſt pas tout entier au ſecond rang de la premiere tranche, il n'y a que le dernier chiffre 9. Pareillement il n'y a que le dernier chiffre 2 du ſecond produit 42 qui réponde au premier rang de la ſeconde tranche.

218. Il ſuit encore de la troiſiéme remarque, que dans le nombte 54110736 qui eſt le quarré de 7356, il y a un rang de moins après le quarré de 3, qu'après le double de 7 multiplié par 3; qu'il y a auſſi un rang de moins après le quarré de 5, qu'après le double de 73 multiplié par 5, & qu'enfin il n'y a plus de rang après le quarré de 6, au lieu qu'il y a encore un rang après le double de 745 multiplié par 6 : en ſorte qu'il y a toûjours un rang de moins après le quarré d'un chiffre, qu'après le double des caracteres précedens multiplié par ce chiffre. Tout ce qu'on vient de dire convient généralement aux nombres qui ſurpaſſent dix.

Dans la démonstration suivante, nous supposerons qu'il n'y a plus de reste après la derniere soustraction, & nous appellerons le nombre dont on tire la racine, le *nombre proposé*, & celui qu'on trouve à la racine sera nommé le *nombre trouvé*. Il s'agit donc de prouver, que le nombre trouvé en suivant les regles prescrites, est la racine du nombre proposé, ou ce qui est la même chose, que ce nombre proposé est le quarré de celui qu'on a trouvé.

DEMONSTRATION DE L'EXTRACTION des racines quarrées.

219. Afin que le nombre proposé soit le quarré de celui qu'on a trouvé, il suffit que le premier contienne tous les produits qui composent le quarré du second. Or le nombre proposé contient tous les produits qui forment le quarré du nombre trouvé : car ces pro-
* 212. duits sont * le quarré du premier chiffre, plus le double du premier chiffre multiplié par le second avec le quarré du second, &c. Or en suivant les regles de la méthode, on est assuré que le nombre proposé contient tous ces Produits; puisque selon cette méthode, on retranche d'abord du premier membre le quarré du premier chiffre du nombre trouvé : 2°. On retranche du second membre le diviseur, c'est-à-dire, le double du premier chiffre multiplié par le second avec le quarré du second. 3°. On retranche du troisiéme membre le diviseur, c'est-à-dire, le double des deux premiers chiffres multiplié par le troisiéme avec le quarré du troisiéme, &c. Donc le nombre proposé contient tous les produits qui composent le quarré du nombre trouvé; ainsi le premier est le quarré du second.

220. S'il y avoit un reste après la derniere soustraction, ce seroit une marque que le nombre proposé ne seroit pas un quarré parfait; ainsi le nombre trouvé

ne seroit pas la racine exacte du nombre proposé : mais ce seroit la racine du plus grand quarré contenu dans ce nombre ; ainsi dans le premier exemple le nombre trouvé, sçavoir 457, n'est pas la racine exacte du nombre proposé 209254 : mais 457 est la racine de 208849, qui est le plus grand quarré contenu dans 209254 ; car si on prend 458 plus grand seulement d'une unité que 457, on trouvera que le quarré de la racine 458 est plus grand que le nombre 209254. C'est une suite de la méthode de l'extraction, puisque si le quarré de 458 étoit contenu dans 209254, on auroit pû mettre 8 à la place de 7, quand on a operé sur le dernier membre.

221. Il reste encore à faire voir pourquoi à chaque membre on prend pour dividende le premier chiffre de la tranche abbaissée avec le reste de la soustraction, & pour diviseur le double de ce qu'on a déja trouvé à la racine : ainsi au troisiéme membre du premier exemple, on a pris 675 pour dividende, & pour diviseur le double de 45. La raison de ces deux regles paroît assez par ce qui a esté dit avant la démonstration de la méthode de l'extraction. Car, puisque le double de 45 multiplié par 7, se trouve au premier rang de la troisiéme tranche abbaissée *, il s'ensuit que pour trouver 7, il faut diviser ce produit par le double de 45. * 216.

222. Lorsqu'un nombre entier n'est pas un quarré parfait, c'est-à-dire, qu'il n'y a point de nombre entier qui multiplié par lui-même donne un produit égal au nombre entier dont on cherche la racine, on peut bien approcher de plus en plus de la racine exacte de ce nombre ; mais on démontre qu'il n'est pas possible d'y arriver : dans ce cas on indique la racine du nombre proposé, en se servant du signe radicale : par exemple, si on a besoin de la racine quarrée de 50, lequel nombre est un quarré imparfait, on la marque en

cette maniere, $\sqrt[2]{50}$, ou simplement $\sqrt{50}$. Pareillement les racines quarrées de 18 & de 15 se marquent ainsi, $\sqrt{18}$ & $\sqrt{15}$. Ces racines sont appellées *incommensurables*.

223. Si un quarré imparfait est le produit d'un quarré parfait, par un autre nombre, pour lors on exprime quelquefois la racine du quarré imparfait d'une autre maniere; par exemple, 50 est un quarré imparfait; mais c'est le produit de 25 par 2. Or 25 est un quarré parfait. Cela posé, puisque 50 est égal à 25 multiplié par 2, il faut que la racine de 50 soit égale à la racine de 25 multiplié par la racine de 2. Or la racine de 25 est 5, & la racine de 2 est $\sqrt{2}$; par conséquent la racine de 50 est égale à 5 multiplié par $\sqrt{2}$; ce qui se marque en cette maniere, $\sqrt{50} = 5 \times \sqrt{2}$, ou plutôt $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$. Pareillement 18 étant égal au produit de 9 par 2, il s'ensuit que la racine de 18 est égale à la racine de 9 multipliée par la racine de 2: mais 9 est un quarré parfait dont 3 est la racine; par conséquent la racine de 18 peut estre marquée en cette maniere, $3\sqrt{2}$. Il n'en est pas de même de la racine de 15, parce que 15 n'est pas le produit d'un quarré parfait multiplié par un autre nombre: si on veut donc se servir du signe radical pour exprimer la racine de 15, on ne peut la marquer qu'en cette maniere, $\sqrt{15}$ ou $\sqrt[2]{15}$.

De l'extraction de la Racine quarrée des quantitez litterales.

235. La méthode pour extraire la racine quarrée des quantitez littérales, est la même que celle qu'on a employée pour les nombres; excepté premierement qu'il n'y a point de rang à garder dans les différens produits qu'on veut soustraire, & qu'il ne faut pas diviser la quantité littérale en tranches comme on fait

les nombres : & en ſecond lieu, qu'après chaque ſouſtraction il faut faire la réduction des quantitez ſemblables. Il ſuffira de donner un exemple pour faire entendre l'application de la méthode ſur les quantitez algébriques.

Soit la quantité $9cc - 12cdx + 4d^2x^2 + 24cfy - 16dfxy + 16f^2y^2$ dont il faut extraire la racine quarrée.

$$\begin{array}{cccccc|l} 9cc & -12cdx & +4d^2x^2 & +24cfy & -16dfxy & +16f^2y^2 & 3c-2dx+4fy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline -9cc & +12cdx & -4d^2x^2 & -24cfy & +16dfxy & -16f^2y^2 & 6c=2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6c-4dx=2a \end{array}$$

Après avoir tiré une ligne au-deſſous & une autre à droite de la quantité propoſée, j'opere ſur le premier terme $9cc$ qui eſt le premier membre : ainſi je prends la racine quarrée de $9cc$, c'eſt $3c$, & j'écris cette racine à droite de la quantité propoſée : enſuite j'éleve $3c$ au quarré, il vient $+9cc$, qu'il faut ſouſtraire en l'écrivant au-deſſous du premier terme avec le ſigne opposé : enfin je fais la réduction, & j'écris un o ſous les quantitez qui ſe détruiſent.

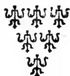
J'opere enſuite comme ſur le ſecond membre d'un nombre dont on tire la racine ; ainſi je prends pour dividende le ſecond terme $-12cdx$, & pour diviſeur le double de ce que j'ai trouvé à la racine ; ce diviſeur eſt donc $6c$; c'eſt pourquoi je diviſe $-12cdx$ par $6c$, le quotient eſt $-2dx$ que je poſe à la ſuite de $3c$. Après cela je multiplie le diviſeur $6c$ par $-2dx$, & j'ajoûte le quarré de $-2dx$, la ſomme ſera $-12cdx + 4d^2x^2$, laquelle doit être ôtée de la quantité propoſée ; je fais donc la ſouſtraction en écrivant la ſomme avec des ſignes contraires : enſuite je fais la réduction, & il ne reſte plus dans la quantité propoſée, que ces trois termes $+24cfy - 16dfxy + 16f^2y^2$, ſur leſquels j'opere de la même maniere que ſur les deux termes précedens ;

je prends donc $24cfy$ pour dividende, & pour diviſeur $6c-4dx$, c'eſt le double de ce qui eſt à la racine : je diviſe enſuite $24cfy$ par $6c$ premier terme du diviſeur, & j'écris le quotient $+4fy$ à la racine : après cela je multiplie le diviſeur entier par $4fy$, le produit eſt $24cfy-16dfxy$ auquel j'ajoûte $16f^2y^2$ quarré du terme que je viens de mettre à la racine, la ſomme eſt $24cfy-16dfxy+16f^2y^2$ que j'écris ſous les trois derniers termes de la quantité propoſée, avec des ſignes contraires à ceux de cette ſomme : enfin je fais la réduction, & il ne reſte rien ; c'eſt pourquoi l'opération eſt achevée. La racine de la quantité propoſée eſt donc $3c-2dx+4fy$.

Pour s'aſſurer ſi on a bien operé, on fait la preuve de la meme maniere que pour les nombres.

236. Remarquez qu'il n'y a point de preuve à faire dans l'extraction de la racine des quantitez littérales, non plus que dans la diviſion de ces quantitez.

237. Remarquez encore que le terme qui ſert de premier membre, doit être un quarré parfait ; de ſorte que ſi le premier terme de la quantité n'eſt pas un quarré, il en faut choiſir un autre qui ſoit quarré, ſur lequel on commencera l'opération : par exemple, ſi le premier terme de la quantité propoſée avoit été $-12cdx$, il auroit fallu prendre un autre terme pour commençer l'opération.





LIVRE SECOND,

CONTENANT

UN TRAITÉ DES RAISONS, des Proportions & des Fractions.

IL n'y a point de partie dans les Mathématiques qui ſoit ſi utile & ſi néceſſaire, que celle qui traite des proportions : on les employe ſouvent dans les démonſtrations, & elles ſont le fondement de la plûpart des opérations que l'on fait, telles que ſont les regles de trois, de compagnie, d'alliage, de fauſſes poſitions, &c. C'eſt par le moyen des proportions, que l'on découvre la ſolution d'une infinité de queſtions & de problêmes que l'on ne pourroit réſoudre ſans leur ſecours : c'eſt pourquoi ceux qui ont deſſein de faire quelque progrès dans la Science des Mathématiques, doivent s'appliquer d'une maniere particuliere à cette partie qui eſt la clef des autres.

DES RAISONS.

Une *raiſon*, comme on prend ici ce terme, eſt le rapport ou la comparaiſon de deux grandeurs, ſoit nombres, étenduës, vîteſſes, temps, &c. Or on peut comparer deux grandeurs en deux manieres differentes, ou en conſidérant de combien l'une ſurpaſſe l'autre, ou en examinant comment l'une contient l'autre. La premiere maniere de conſidérer deux grandeurs, eſt appellée *Raiſon arithmétique*, & la ſeconde, *Raiſon géométrique*. Art. I.

2. La raiſon arithmétique eſt donc une comparaiſon de deux grandeurs, dans laquelle on conſidere de combien l'une ſurpaſſe ou eſt ſurpaſſée par l'autre : par exemple, ſi je conſidere que 6 ſurpaſſe 2 de 4 ; cette comparaiſon des nombres 6 & 2, eſt une raiſon arithmétique.

3. La raiſon géometrique eſt une comparaiſon de deux grandeurs, dans laquelle on conſidere la maniere dont l'une contient l'autre, ou, ce qui revient au même, la raiſon géometrique eſt la maniere dont une grandeur en contient une autre : par exemple ſi je conſidere que 6 contient 2 trois fois, cette comparaiſon eſt une raiſon ou rapport géometrique.

4. Remarquez qu'une grandeur en peut contenir une autre ou en entier ou en partie : par exemple, 6 contient 2 entierement trois fois : mais 5 ne contient 20 qu'en partie ; c'eſt-à-dire, que 5 contient ſeulement une partie de 20, ſçavoir le quart : de même 12 contient en partie 18, parce qu'il en renferme les deux tiers.

5. Il y a deux termes dans toute raiſon, ſoit arithmétique, ſoit géométrique, l'*antécedent* & le *conſéquent* ; l'antécedent eſt celui qui eſt comparé à l'autre ; le conſéquent eſt celui auquel l'antécedent eſt comparé. L'antécedent eſt toûjours le premier terme de la raiſon, & le conſéquent eſt le ſecond : dans l'exemple propoſé 6 eſt l'antécedent, & 2 eſt le conſéquent.

6. C'eſt par la ſouſtraction que l'on découvre de combien une grandeur ſurpaſſe l'autre ; c'eſt pourquoi on connoît la valeur d'une raiſon arithmétique, en ôtant le conſéquent de l'antécedent, ou l'antécedent du conſéquent : par exemple, on connoît la valeur de la raiſon arithmétique de 6 à 2, en ôtant 2 de 6 : mais on verra dans la ſuite que la valeur de la raiſon géométrique ſe connoît en diviſant toûjours l'antécedent par le conſéquent.

Quand on parle de raiſon ſans déterminer l'arithmétique ou la géometrique, il faut toûjours entendre la géometrique ; c'eſt la même choſe quand on ſe ſert du terme de rapport.

7. Pluſieurs auteurs définiſſent la raiſon géometrique en diſant que c'eſt la maniere dont une grandeur, c'eſt l'antécedent, en contient une autre, ſçavoir le conſéquent, ou y eſt contenuë ; ils ajoûtent ces termes *ou y eſt contenuë* pour exprimer le cas dans lequel l'antecedent eſt plus petit que le conſéquent : mais cette définition n'eſt pas exacte. Car ſi dans ce cas la raiſon étoit la maniere dont l'antécedent eſt contenu dans ſon conſéquent, plus il y ſeroit contenu, plus la raiſon ſeroit grande, puiſqu'alors cette maniere ſeroit plus grande. Or cela n'eſt pas vrai : car, comme nous le verrons bien-tôt dans le quatriéme principe, la raiſon de 6 à 12 eſt plus grande que celle de 4 à 12, quoique l'antécedent de cette derniere ſoit contenu plus de fois dans ſon conſéquent que celui de la premiere ne l'eſt dans le ſien.

On peut comparer une raiſon avec une autre, pour voir ſi elle eſt égale, ou plus grande ou plus petite. Nous allons donner quelques définitions, & enſuite nous expoſerons pluſieurs principes qui ſerviront beaucoup pour cette comparaiſon, & pour l'intelligence de ce que nous dirons dans la ſuite.

Il faut diſtinguer deux ſortes de parties d'un tout ; ſçavoir, les parties *aliquotes* & les parties *aliquantes.*

8. Les parties aliquotes ſont celles qui répetées un certain nombre de fois, meſurent leur tout exactement ; c'eſt-à-dire, ſans reſte : par exemple, 3 eſt partie aliquote de 12, parce qu'étant répeté quatre fois, il meſure exactement 12, ou, ce qui eſt la même choſe, il eſt contenu quatre fois exactement dans 12 : de même 6 eſt partie aliquote de 30, parce qu'il eſt contenu cinq fois ſans reſte dans 30.

9. Les parties aliquotes sont appellées *sou-multiples*, & le tout est appellé *multiple* par rapport aux parties aliquotes : ainsi 6 est sou-multiple de 30, & 30 est multiple de 6. Pareillement 3 est sou-multiple de 12, & 12 est multiple de 3. En général quand une grandeur en contient exactement une autre, la premiere est multiple, & la seconde sou-multiple.

10. Les parties aliquantes sont celles qui ne sont pas contenuës exactement dans leur tout ; par exemple, 5 est partie aliquante de 12, parce qu'il y est contenu deux fois avec un reste qui est 2. 8 est aussi partie aliquante de 30, parce qu'il y est contenu trois fois avec un reste qui est 6.

11. Lorsque l'on compare les parties soit aliquotes soit aliquantes d'un tout avec celles d'un autre tout, il y en a que l'on appelle *semblables* ou *pareilles*. Les parties semblables ou pareilles, sont celles qui sont contenuës chacune de la même maniere dans leur tout : ainsi 5 & 7 sont des parties semblables de 15 & de 21, parce que 5 est contenu trois fois dans 15, comme 7 est contenu trois fois dans 21. De même 4 & 6 sont des parties semblables de 10 & de 15, parce que 4 est autant contenu dans 10 que 6 dans 15 ; sçavoir, deux fois & demi. 3 & 6 sont aussi des parties semblables de 14 & de 28, parce que 3 est autant contenu dans 14 que 6 dans 28, sçavoir, quatre fois & deux tiers.

PRINCIPE I.

12. Si deux raisons sont égales chacune à une troisiéme, elles sont égales entr'elles. De même si de plusieurs raisons, la premiere est égale à la seconde, la seconde à la troisiéme, la troisiéme à la quatriéme, & ainsi de suite, il est évident que la premiere est égale à la derniere.

PRINCIPE II.

13. Deux grandeurs égales ont un même rapport ou une même raiſon à une troiſiéme grandeur. Si *a* & *b* ſont égaux, ils ont même rapport à *c*; en ſorte que ſi *a* contient deux fois *c*, *b* le contiendra auſſi deux fois, ou ſera le double de *c*; ſi *a* eſt la moitié de *c*, *b* en ſera auſſi la moitié.

PRINCIPE III.

14. Lorſque deux grandeurs ont un même rapport à une troiſiéme, les deux premieres ſont égales entr'elles: ſi *a* & *b* ont un même rapport avec *c*; par exemple, ſi *a* & *b* contiennent chacun *c* deux fois, trois fois, quatre fois, &c. ou, ce qui eſt la même choſe, ſi *a* & *b* ſont chacun le double, le triple, le quadruple de *c*, ces deux grandeurs ſont égales. De même ſi *a* & *b* ſont chacun la moitié, le tiers, le quart de *c*, *a* & *b* ſont des grandeurs égales. Ce troiſiéme principe eſt la propoſition inverſe ou réciproque du ſecond.

PRINCIPE IV.

15. Une raiſon devient d'autant plus grande que ſon antécedent augmente, le conſéquent demeurant le même: ainſi la raiſon de 8 à 2 eſt plus grande que celle de 6 à 2. De même la raiſon de 12 à 15 eſt plus grande que celle de 9 à 15. C'eſt la même choſe ſi les quantitez ſont exprimées en lettres: par exemple, en ſuppoſant *a* plus grand que *b*, la raiſon de *a* à *c* eſt plus grande que celle de *b* à *c*. Cela ſuit évidemment de la notion de la raiſon qui n'eſt autre choſe que la maniere dont l'antecedent contient le conſéquent. Or il eſt clair que plus l'antécedent ſera grand, le conſéquent reſtant le même, plus il contiendra le conſéquent; ſoit qu'il le contienne entierement, comme dans le rapport de 8 à 2 comparé à celui de 6 à 2; ſoit qu'il

le contienne ſeulement en partie, comme dans le rapport de 12 à 15 comparé à celui de 9 à 15, auquel cas l'antécedent contient une plus grande partie du conſéquent, quoiqu'il ne le contienne pas entierement.

PRINCIPE V.

16. Plus le conſéquent d'une raiſon eſt grand, l'antécedent demeurant le même, plus la raiſon eſt petite : par exemple, la raiſon de 3 à 9 eſt plus petite que celle de 3 à 6 ; & de même la raiſon de 16 à 8 eſt plus petite que celle de 16 à 4. Pour donner un exemple en lettres, ſuppoſons que b eſt plus grand que c ; pour lors la raiſon de a à b eſt moindre que celle de a à c. C'eſt encore une ſuite de la notion de raiſon : car l'antécedent étant toûjours le même, il contiendra moins un conſéquent plus grand qu'un plus petit.

PRINCIPE VI.

17. Le rapport de deux grandeurs eſt égal au rapport qui eſt entre leurs moitiez, ou leurs tiers, ou leurs quarts, ou leurs cinquiémes, &c. Par exemple, le rapport qui eſt entre 60 & 20, eſt égal à celui de leurs moitiez 30 & 10, à celui de leurs quarts 15 & 5, à celui de leurs cinquiémes 12 & 4, &c. Ce principe eſt évident, puiſque ſi une des grandeurs contient trois fois l'autre, comme dans l'exemple propoſé, on conçoit que la moitié de la premiere contiendra trois fois la moitié de la ſeconde, que le quart de la premiere contiendra trois fois le quart de la ſeconde, & le cinquiéme de la premiere, trois fois le cinquiéme de la ſeconde : en général le rapport qui eſt entre les tous, eſt égal à celui qui eſt entre les parties ſemblables, par exemple, deux tiers, deux quarts, deux huitiémes, deux quinziémes, &c.

PRINCIPE VII.

18. Quand on multiplie deux grandeurs, comme 8 & 4, par une troisiéme telle que 5, les produits 40 & 20 ont entr'eux une raison égale à celle des deux premieres grandeurs avant la multiplication. C'est une suite évidente du sixiéme principe : car il est clair que les grandeurs 8 & 4 sont chacune des parties semblables, sçavoir, les cinquiémes des produits, puisqu'elles ont été multipliées par 5 ; & par conséquent la raison qui est entre les produits est égale à celle qui est entre leurs parties semblables. Pour énoncer ce principe, on dit ordinairement, les produits sont entr'eux comme les racines lorsqu'elles ont été multipliées par la même quantité : dans l'exemple proposé, 8 & 4 sont les racines en général, si on multiplie a & b par d, les produits ad & bd sont entr'eux comme les racines a & b.

On peut appercevoir la vérité de ce septiéme principe indépendamment du sixiéme : car les deux produits 40 & 20 contenant l'un & l'autre 5 parties, il est évident que si chacune des parties du premier produit contient deux fois une partie du second, il est necessaire que le premier produit contienne aussi deux fois le second ; ainsi les produits ont entre eux une raison égale à celle des racines, lorsqu'elles ont été multipliées par une même grandeur. On peut appliquer le même raisonnement au principe suivant.

PRINCIPE VIII.

19. Lorsqu'on divise deux grandeurs par une troisiéme, les quotiens ont entr'eux une raison égale à celle des grandeurs avant la division : par exemple, si on divise 40 & 20 par 5, les quotiens 8 & 4 ont un même rapport que 40 & 20. En général ad & bd étant divisez l'un & l'autre par d, les quotiens a & b ont un rapport égal à celui de ad à bd. C'est aussi une suite du

ſixiéme principe, puiſque les quotiens de deux grandeurs diviſées par une troiſiéme, ſont des parties ſemblables de ces grandeurs : ſi, par exemple, le diviſeur eſt 3, les quotiens ſont des tiers ; ſi le diviſeur eſt 4, les quotiens ſont des quarts ; ſi le diviſeur eſt 5, les quotiens ſont des cinquiémes, &c.

20. Une raiſon comme celle de 60 à 20 peut être marquée en cette maniere, $\frac{60}{20}$ en mettant le conſéquent ſous l'antécedent, & ſéparant l'un de l'autre par une petite ligne. Quand deux raiſons ſont égales, on les marque ſouvent l'une & l'autre comme nous venons de dire, & on met le ſigne d'égalité entre deux : par exemple, on exprime l'égalité des raiſons de 60 à 20 & de 30 à 10 en cette maniere, $\frac{60}{20}=\frac{30}{10}$. De même $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ſignifie que la raiſon de a à b eſt égale à celle de c à d.

Tout cela poſé, je dis que deux raiſons ſont égales.

21. 1°. Lorſque chacun des antécedens contient ſon conſéquent exactement ou ſans reſte & le même nombre de fois : par exemple, la raiſon de 12 à 4 eſt égale à celle de 15 à 5, parce que l'antécedent 12 de la premiere raiſon contient ſon conſéquent 4 trois fois, comme l'antécedent 15 contient ſon conſéquent 5 auſſi trois fois ſans reſte. De même $\frac{30}{6}=\frac{10}{2}$ parce que les deux antécedens 30 & 10 contiennent chacun cinq fois leur conſéquent.

22. 2°. Quand les antécedens contiennent également & ſans reſte les parties aliquotes pareilles des conſéquens : par exemple, la raiſon de 12 à 21 eſt égale à celle de 8 à 14, parce que les deux antécedens 12 & 8 contiennent autant de fois chacun les aliquotes pareilles de leur conſéquent : car ces aliquotes pareilles ſont 3 & 2. Or 3 eſt contenu quatre fois dans 12, & 2 eſt auſſi contenu quatre fois dans l'autre antécedent 8. De même $\frac{15}{6}=\frac{40}{16}$, parce que les aliquo-

tes pareilles des conséquens, sçavoir 3 & 8, sont contenuës chacune cinq fois dans leur antécedent; sçavoir 3 dans 15, & 8 dans 40. Enfin $\frac{5}{15} = \frac{7}{21}$, parce que les aliquotes pareilles des conséquences, sçavoir 5 & 7 sont, contenuës chacune une fois exactement dans leur antécedent.

Il est évident qu'il y a égalité de raïsons dans l'un & l'autre cas: car une raison est la maniere dont l'antécedent contient son conséquent; donc deux raisons sont égales lorsque chaque antécedent contient son conséquent de la même maniere. Or dans le premier cas les antécedens contiennent leur conséquent de la même maniere, puisqu'ils le contiennent le même nombre de fois. De même dans le second cas les deux antécedens contiennent chacun leur conséquent de la même maniere, puisqu'ils renferment autant de fois & sans reste les aliquotes pareilles des conséquens; ainsi dans le second cas les raisons sont égales comme dans le premier.

Nous avons dit dans le premier cas que deux raisons sont égales, lorsque les antécedens contiennent chacun leur conséquent exactement & le même nombre de fois: nous venons de dire dans le second que deux raisons sont aussi égales, quoique les antécedens ne contiennent pas exactement leur conséquent, pourvû que ces antécedens contiennent exactement & le même nombre de fois les aliquotes pareilles de leur conséquent. Il peut arriver que deux raisons soient égales, quoique ni les conséquens entiers, ni les aliquotes pareilles de ces conséquens ne soient pas contenus exactement ou sans reste dans les antécedens: c'est ce que nous allons voir dans le troisiéme cas.

23. 3°. Enfin deux raisons sont égales, lorsque les antécedens ne contenant pas exactement les conséquens ni leurs aliquotes pareilles, ils contiennent cependant ces aliquotes le même nombre de fois avec

des restes qui ont entr'eux une raison égale à celle des aliquotes pareilles : par exemple, $\frac{81}{120} = \frac{27}{40}$, parce que les antécedens 81 & 27 contiennent chacun deux fois 30 & 10 qui sont les aliquotes pareilles des conséquens, & d'ailleurs les restes des antécedens, sçavoir 21 & 7 ont entr'eux une raison égale à celle des aliquotes pareilles 30 & 10.

A la place de 30 & de 10, on pourroit prendre d'autres aliquotes pareilles plus petites comme 15 & 5 qui sont contenuës cinq fois chacune dans leur antécedent avec les restes 6 & 2, dont la raison est égale à celle des aliquotes pareilles 15 & 5.

Si au lieu de prendre les aliquotes pareilles 30 & 10, ou 15 & 5, comme nous avons fait, on choisissoit 3 pour aliquote du premier conséquent 120, & 1 pour aliquote pareille de l'autre conséquent 40, ces deux aliquotes 3 & 1 seroient contenuës chacune vingt-sept fois sans reste dans leur antecedent : ce qui reviendroit au second cas.

24. Mais on démontre en Géometrie qu'il y a des grandeurs ; sçavoir, des lignes, des surfaces, &c. qui sont telles qu'aucune aliquote de l'une ne peut être aliquote de l'autre ; en sorte que si l'une est antécedent & l'autre conséquent d'une raison, il sera impossible de trouver une aliquote du conséquent, si petite qu'elle soit, qui puisse être contenuë sans reste dans l'antécedent : ces sortes de grandeurs s'appellent *incommensurables* ; c'est-à-dire, qu'elles n'ont point de mesure commune, & la raison qui se trouve entr'elles est nommée *sourde*, ou *rapport incommensurable*, on dit aussi que ces grandeurs ne sont pas entr'elles comme nombre à nombre, parce qu'il n'y a point de nombres qui n'ayent au moins l'unité pour mesure commune, si ce sont des nombres entiers ; & si ces nombres sont des fractions, ils auront toûjours une mesure commune ; sçavoir, quelque partie de l'unité.

Nous

Nous ne nous arrêterons pas à démontrer l'égalité des raisons dans ce troisiéme cas, parce que cela n'est pas nécessaire pour la suite.

25. Une raison géométrique n'étant que la maniere dont l'antécedent contient son conséquent, il est clair qu'on peut connoître la valeur d'une raison en divisant l'antécedent par le conséquent, puisque c'est en divisant une grandeur par une autre que l'on connoît combien la premiere contient la seconde, ou, ce qui est la même chose, combien la seconde est contenuë dans la premiere: par exemple, pour sçavoir combien 30 contient 5, il faut diviser 30 par 5, & le quotient 6 marque que 30 contient 5 six fois; ainsi la valeur de la raison $\frac{30}{5}$ est le quotient 6: ce que l'on marque en cette maniere, $\frac{30}{5}=6$. On peut donc dire en général que la valeur d'une raison est le quotient de l'antécedent divisé par le conséquent.

26. Il suit de là que la raison de 30 à 5 est fort differente de celle de 5 à 30. Car on vient de dire que la valeur de la raison de 30 à 5 est exprimée par 6: au lieu que la valeur de la raison de 5 à 30 est la fraction $\frac{1}{6}$ qui marque le quotient de 5 divisé par 30, puisque 5 ne contient que la sixiéme partie de 30. Ainsi cette raison de 5 à 30 est 36 fois plus petite que celle de 30 à 5, parce que le quotient $\frac{1}{6}$ est seulement la trente-sixiéme partie de l'autre quotient 6.

27. Il suit aussi que deux raisons sont égales, lorsque les quotiens des antécedens divisés par les conséquents sont égaux: & réciproquement, les quotiens sont égaux lorsque les raisons sont égales.

28. Il arrive fort souvent qu'on ne peut faire exactement la division de l'antécedent par le conséquent, soit parce que ce conséquent est plus grand que l'antecedent, soit parce qu'il n'y est pas contenu sans reste: pour lors le quotient peut être mar-

qué par quelque lettre que l'on ſuppoſe repréſenter la valeur de la raiſon : par exemple, la valeur de la raiſon $\frac{5}{7}$ ne peut être exprimée par un nombre entier qui ſoit le quotient de l'antécedent diviſé par le conſéquent. De même la raiſon $\frac{20}{9}$ ne peut être exprimée par un nombre entier, parce que 9 n'eſt pas contenu ſans reſte dans 20 : cependant on peut ſuppoſer dans l'un & l'autre exemple que la raiſon eſt exprimée par une lettre qui déſigne le quotient ; ainſi on peut ſuppoſer que $\frac{5}{7}=m$, & que $\frac{20}{9}=n$. En général la raiſon $\frac{a}{b}=m$, en ſuppoſant que la lettre m repréſente le quotient de a diviſé par b.

DES PROPORTIONS.

29. Deux raiſons égales forment une *proportion* qui n'eſt autre choſe que l'égalité de deux raiſons, ou la comparaiſon de deux raiſons égales : & comme il y a deux ſortes de raiſons, il y a auſſi deux ſortes de proportions, la *géométrique & l'arithmétique*.

30. La proportion géométrique eſt une comparaiſon de deux raiſons géométriques égales : par exemple, la raiſon géométrique de 15 à 5 étant égale à celle de 21 à 7, ces deux raiſons forment une proportion géométrique que l'on marque ſouvent comme nous avons dit, $\frac{15}{5}=\frac{21}{7}$, & plus ordinairement, en mettant quatre points entre les deux raiſons, & un point entre l'antécedent & le conſéquent de chacune en cette maniere, 15 . 5 :: 21 . 7. En général s'il y a proportion entre les quatre grandeurs a, b, c & d, on la marque ainſi, $a . b :: c . d$, ou bien, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Lorſqu'il s'agit d'énoncer une proportion comme la premiere qu'on a apportée pour exemple, on dit : la raiſon de 15 à 5 eſt égale à celle de 21 à 7, ou bien, 15 eſt à 5 comme 21 à 7. On dit encore : 15 & 5 ſont en-

tr'eux comme 21 & 7, & quelquefois, 15, 5, 21 & 7 ſont proportionnels.

31. La proportion arithmétique eſt une comparaiſon de deux raiſons arithmétiques égales : par exemple, les raiſons arithmétiques de 5 à 3 & de 8 à 6 étant égales, elles forment une proportion arithmétique qui ſe marque en cette maniere, 5 . 3 : 8 . 6, en mettant ſeulement deux points au lieu de quatre entre les raiſons.

32. Pour connoître ſi deux raiſons arithmétiques, telles que celle de 5 à 3, & de 8 à 6 ſont égales, il faut ſe ſouvenir que la raiſon arithmétique n'eſt que la maniere dont une grandeur ſurpaſſe l'autre, ou autrement l'excès de l'une ſur l'autre; d'où il ſuit, que les raiſons arithmétiques ſont égales, quand les antécedens ſurpaſſent également les conſéquens, ou lorſque les conſéquens ſurpaſſent également les antécedens : dans l'exemple propoſé, les deux antécedens 5 & 8 ſurpaſſant également leurs conſéquens 3 & 6, ſçavoir de 2, les deux raiſons arithmétiques de 5 à 3, & de 8 à 6 ſont égales.

Voici un exemple de la proportion arithmétique en lettres : ſi a ſurpaſſe autant b que c ſurpaſſe d, on aura la proportion arithmétique $a . b : c . d$. On énonce la proportion arithmétique comme la géométrique.

33. Il n'y a point de grandeurs, ſoit nombres, étenduës, mouvemens, vîteſſes, &c. entre leſquelles il n'y ait une raiſon géométrique & une raiſon arithmétique : par exemple, entre 12 & 3 il y a une raiſon géométrique que l'on exprimeroit par 4, parce que l'antécedent 12 contient 4 fois le conſéquent 3; il y a auſſi entre les mêmes nombres 12 & 3 une raiſon arithmétique que l'on marqueroit par 9, parce que l'antécedent ſurpaſſe le conſéquent de 9 : ce qui fait voir qu'il y a bien de la différence entre la raiſon géométrique & l'arithmétique; c'eſt pourquoi quatre grandeurs peu-

vent être en proportion géométrique, quoiqu'elles ne soient pas en proportion arithmétique : par exemple, il y a une proportion géométrique entre ces quatre nombres, 12, 3, 20, 5 : mais il n'y a point de proportion arithmétique, parce que 12 ne surpasse pas autant 3, que 20 surpasse 5 ; il faudroit mettre 11 à la place de 5, & on auroit, 12 . 3 : 20 . 11 : c'est une proportion arithmétique, parce que 12 surpasse autant 3, que 20 surpasse 11.

34. Dans une proportion, soit géométrique, soit arithmétique, il y a quatre termes ; sçavoir, l'antécedent & le conséquent de la premiere & de la seconde raison : par exemple, dans la proportion, $a . b :: c . d$, a & b sont l'antécedent & le conséquent de la premiere raison ; c & d sont l'antécedent & le conséquent de la seconde raison.

35. Le premier & le dernier terme s'appellent les *extrêmes*, le second & le troisiéme les *moyens* : dans notre exemple, a & d sont les extrêmes, b & c sont les moyens.

36. Quelquefois le même terme est conséquent de la premiere raison, & antécedent de la seconde ; on l'appelle *moyen proportionnel* : comme dans cette proportion géométrique, 5 . 10 :: 10 . 20 ; ou bien dans cette proportion arithmétique, 5 . 10 : 10 : 15 ; dans l'une & l'autre 10 est moyen proportionnel, & la proportion est appellée *continuë* : on la marque souvent en cette sorte, $\div$ 5 . 10 . 20, pour la proportion géométrique, & de cette maniere, $\div$ 5 . 10 . 15, pour la proportion arithmétique.

37. Lorsqu'il y a plus de trois termes dans l'une ou l'autre proportion continuë, on la nomme *progression* : voici une progression géométrique, $\div$ 5 . 10. 20. 40. 80. 160, &c. & voici une progression arithmétique, $\div$ 5. 10. 15. 20. 25. 30, &c. Une progression est donc une suite de raisons égales, dont chacun des ter-

mes, excepté le premier & le dernier, est conséquent d'une raison & antécedent de la suivante : nous disons excepté le premier & le dernier terme : car il est clair que le premier n'est qu'antécedent de la premiere raison, & que le dernier n'est que conséquent de la derniere. Pour énoncer la premiere progression, on dit : 5 est à 10 comme 10 est à 20, comme 20 est à 40, comme 40 est à 80, comme 80 est à 160, &c. La seconde progression, qui est l'Arithmétique, s'énonce de la même maniere, en exprimant les termes 5, 10, 15, 20, 25, 30, &c. à la place de ceux de la progression géométrique.

38. Il paroît par ce qui a été dit, que si les deux premiers termes d'une proportion géométrique sont égaux, les deux derniers sont aussi égaux entr'eux. Pareillement si les antécedens sont égaux, les conséquens sont aussi égaux entr'eux : & réciproquement si les conséquens sont égaux, il faut que les antécedens le soient aussi : par exemple, si dans la proportion $a . b :: c . d$, les deux termes a & b sont égaux, les deux autres c & d sont aussi égaux entr'eux ; mais il n'est pas nécessaire qu'ils soient égaux aux deux premiers. Pareillement si les antécedens a & c sont égaux, les conséquens b & d sont encore égaux ; & si les conséquens sont égaux, les antécedens le sont aussi. Tout cela est une suite de la notion de la proportion géométrique : car afin que deux raisons soient égales, il faut que chaque antécedent contienne son conséquent de la même maniere. Or cela posé, tout ce que l'on vient de dire est vrai.

39. De ce que chaque antécedent d'une proportion géométrique doit contenir son conséquent de la même maniere, il suit encore que si un des antécedens est plus grand que son conséquent, l'autre antécedent doit aussi être plus grand que son conséquent. Et si un des antécedens est moindre que son conséquent, l'autre sera pareillement moindre que le sien. Ces deux

derniers articles peuvent aussi s'appliquer à la proportion arithmétique.

Nous avons averti que quand on parloit des raisons sans spécifier la géométrique ou l'arithmétique, il falloit entendre la géometrique : on doit de même entendre la proportion géométrique quand on parle de proportion, à moins qu'on ne spécifie l'arithmétique. Nous allons traiter de la proportion géométrique, & ensuite nous dirons quelque chose de la proportion arithmétique.

La proprieté fondamentale de la proportion géométrique, est l'égalité du produit des extrêmes à celui des moyens Il n'y a point de proposition dans toutes les Mathématiques d'un usage aussi étendu; nous allons en faire le théorême suivant.

THÉORÊME PREMIER ET FONDAMENTAL.

40. *Dans toute proportion géométrique, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.*

Soit la proportion 8 . 4 :: 6 . 3, dont les deux extrêmes sont 8 & 3, & les deux moyens 4 & 6; il faut prouver que le produit de 8 par 3 est égal au produit de 4 par 6.

DÉMONSTRATION.

Si on multiplie 8 & 4 par 3, le produit de 4 par 3 sera la moitié du produit de 8 par 3, puisque 4 est la moitié de 8 : mais si au lieu de multiplier 4 par 3 on le multiplioit par un nombre double de 3, le produit qui en viendroit seroit double du produit de 4 par 3, & par conséquent égal au produit de 8 par 3. Or le second moyen 6 est nécessairement le double de 3, parce que le premier antécedent 8 étant le double de son conséquent 4, il faut aussi que le second antécedent 6 soit le double de son conséquent 3; autrement il n'y auroit pas de proportion : donc le produit de 4

par 6 est égal au produit de 8 par 3, c'est-à-dire, que le produit des moyens est égal au produit des extrêmes. Ce qu'il falloit démontrer.

Il est évident que la même démonstration peut s'appliquer à toute autre proportion, en changeant seulement les termes de *moitié* & de *double*, lorsque cela est nécessaire; si par exemple, il s'agissoit d'une proportion, dont les antécedens fussent trois fois plus grands que leurs conséquens, comme dans celle-ci, 15 . 5 :: 12 . 4, il faudroit mettre dans la démonstration *tiers* à la place de *moitié*, & *triple* à la place de *double* : ainsi des autres proportions.

Ce raisonnement fait entendre la raison pourquoi le produit des extrêmes est égal au produit des moyens : on appelle ces sortes de démonstrations *métaphysiques* : nous allons donner une autre démonstration par lettres.

AUTRE DEMONSTRATION.

Soit la proportion $a . b :: c . d$, ou bien $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, laquelle peut representer toutes les autres, à cause des lettres qui peuvent désigner toutes les grandeurs possibles. Il faut démontrer que ad produit des extrêmes, est égal à bc produit des moyens.

Si on multiplie les deux termes de la premiere raison qui sont a & b par d conséquent de la seconde, les produits ad & bd qui viendront de cette multiplication, auront entr'eux une raison égale à celle des racines a & b *; ainsi on aura la proportion $\frac{ad}{bd}=\frac{a}{b}$: de même si on multiplie les deux termes c & d de la seconde raison par b conséquent de la premiere, les produits bc & bd seront encore entr'eux comme les racines c & d, ou, ce qui est la même chose, les racines c & d auront entr'elles une raison égale à celle des produits bc & bd; on aura donc cette seconde proportion $\frac{c}{d}=\frac{bc}{bd}$.

* 18.

Voici donc les deux proportions que donnent les deux multiplications précedentes.

$\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$ premiere proportion.

$\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$ seconde proportion.

Ces deux proportions contiennent quatre raisons, qui sont $\frac{ad}{bd}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{bc}{bd}$. La premiere de ces raisons est égale à la seconde par la premiere proportion ; la seconde est égale à la troisiéme par l'hypothese ; & la troisiéme est égale à la quatriéme par la seconde proportion ; d'où il suit que la premiere $\frac{ad}{bd}$ & la quatriéme
* 12. $\frac{bc}{bd}$ sont égales. * Or ces deux raisons égales ont le même conséquent ; ainsi les deux antécedens *ad* & *bc* sont
* 14. égaux, * puisqu'ils ont un même rapport à une troisiéme grandeur, sçavoir, au conséquent *bd*; donc $ad = bc$, c'est-à-dire, que le produit des extrêmes est égal à celui des moyens. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

41. Dans une proportion continuë, le produit des extrêmes est égal au quarré de la moyenne proportionnelle. Soit la proportion continuë, $a . b :: b . c$; je dis que $ac = bb$ ou $bb = ac$. C'est une suite évidente du précedent Théorême ; car, puisque le quarré de la moyenne proportionnelle est le produit des moyens, il doit par conséquent être égal au produit des extrêmes.

Nous venons de faire voir que quand quatre grandeurs sont proportionnelles, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens ; on peut aussi démontrer la proposition inverse ou réciproque ; c'est ce que nous allons faire dans le Théorême suivant.

THE'ORÊME II.

42. *Lorsque le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, les quatre grandeurs sont proportionnelles.*

Soient les quatre nombres 8, 4, 6, 3 dont le produit des extrêmes, 8×3, soit égal au produit des moyens, 4×6 : il faut prouver que 8 . 4 :: 6 . 3.

DE'MONSTRATION.

Le premier multiplicande 8 étant double du second multiplicande 4, il faut que le multiplicateur de 4 soit double du multiplicateur de 8 : autrement les produits ne seroient pas égaux : ce qui est contre l'hypothese ; par conséquent le premier multiplicande est au second, comme le second multiplicateur est au premier, ou, ce qui est la même chose, 8 . 4 :: 6 . 3. Ce qu'il falloit démontrer.

On démontrera la même chose toutes les fois que deux produits seront égaux : car pour lors si le premier multiplicande est le triple du second, le second multiplicateur sera le triple du premier ; si le premier multiplicande est cent fois plus grand que le second, le second multiplicateur sera cent fois plus grand que le premier, &c. On entend ici par second multiplicateur, celui par lequel on multiplie le second multiplicande.

AUTRE DE'MONSTRATION.

Soient les quatre grandeurs a, b, c, d, dont le produit des extrêmes qui est ad soit égal à bc produit des moyens ; il faut prouver qu'il s'ensuit que $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

En multipliant les deux premieres grandeurs a & b par la quatriéme d, les produits ad & bd qui viennent de la multiplication, sont en même raison que les racines a & b *, ou, ce qui est la même chose, les racines * 18.
a & b ont entr'elles une raison égale à celle des produits ad & bd : ce qui donne la proportion $\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}$. De même en multipliant les deux grandeurs c & d par b, les produits bc & bd sont encore en même raison que les racines c & d. On a donc cette seconde proportion $\frac{bc}{bd}=\frac{c}{d}$.

Voici donc les deux proportions que donnent les multiplications précedentes.

$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$ premiere proportion.

$\frac{bc}{bd} = \frac{c}{d}$ seconde proportion.

Ces deux proportions contiennent quatre raisons qui sont $\frac{a}{b}$, $\frac{ad}{bd}$, $\frac{bc}{bd}$, $\frac{c}{d}$. La premiere de ces raisons est égale à la seconde par la premiere proportion ; la seconde est égale à la troisiéme, parce que les deux antécedens *ad* & *bc* étant égaux par l'hypothese, ils ont
* 13. même rapport à une troisiéme grandeur telle que *bd* * : enfin la troisiéme raison $\frac{bc}{bd}$ est égale à la quatriéme $\frac{c}{d}$ par la seconde proportion ; d'où il suit que la pre-
* 12. miere raison $\frac{a}{b}$ est égale à la quatriéme $\frac{c}{d}$, * c'est-à-dire, que $a . b :: c . d$. Ce qu'il fal. dem.

COROLLAIRE.

43. Toutes les fois que le produit de deux grandeurs est égal au produit de deux autres, on peut toûjours faire une proportion des quatre grandeurs qui composent ces deux produits, en prenant pour extrêmes les deux racines d'un produit, & pour moyens les deux racines de l'autre produit : par exemple, si $ad = bc$ on en peut faire la proportion, $a . b :: c . d$, en prenant pour extrêmes les racines *a* & *d* du premier produit, & pour moyens les racines *b* & *c* du second. Il est clair par le second théorême que cette proportion $a . b :: c . d$ est vraie, puisque l'on suppose que le produit des extrêmes est égal au produit des moyens. De même si $abc = dfg$, on en peut tirer la proportion $a . d :: fg . bc$. Dans ce dernier exemple, quoique chacun des produits égaux *abc* & *dfg* soit composé de trois racines, on le regarde comme n'en ayant que deux, sçavoir,

a & bc pour le premier produit, & d & fg pour le second, considérant bc comme une seule racine dans abc, & fg comme une seule racine dans dfg. De cette même égalité $abc = dfg$ on auroit pû tirer cette autre proportion, $ab \,.\, df :: g \,.\, c$. En un mot deux produits étant égaux, on peut toûjours conclure que les deux racines qui composent le premier, peuvent être les extrêmes d'une proportion dont les deux racines qui composent l'autre produit, soient les moyens, telles que soient les deux racines qui composent l'un & l'autre produit.

On voit par-là que pour connoître si quatre grandeurs sont proportionnelles, il n'y a qu'à chercher si le produit des extrêmes est égal à celui des moyens.

49. Les deux racines d'un produit sont dites *réciproques* aux deux racines d'un autre produit égal. En général deux grandeurs sont dites réciproques à deux autres, lorsque les deux premieres sont les extrêmes d'une proportion dont les deux autres sont les moyens: par exemple, a & d sont reciproques à b & à c, si $a \,.\, b :: c \,.\, d$.

50. On se sert du terme *réciproquement* dans une signification différente que nous allons expliquer par un exemple. Si on divise une grandeur par deux diviseurs tels qu'on voudra, les quotiens sont entr'eux non pas comme les diviseurs; ce qui voudroit dire que le premier diviseur est au second, comme le premier quotient est au second: mais ces quotiens sont entr'eux réciproquement comme les diviseurs, ou, ce qui est la même chose, ces quotiens sont reciproquement proportionnels aux diviseurs, c'est-à-dire, que le diviseur de la premiere division est au diviseur de la seconde, comme le quotient de la seconde division est au quotient de la premiere: par exemple, si on divise 40 par 10, & ensuite par 5, le premier quotient sera 4, & le second 8. Or $10 \,.\, 5 :: 8 \,.\, 4$. La raison qui est entre

les diviſeurs eſt donc égale à celle qui eſt entre les quotiens pris dans un ordre renverſé ; c'eſt-à-dire, que ſi le diviſeur de la premiere diviſion eſt l'antécedent d'une raiſon, il faut que le quotient de la ſeconde diviſion ſoit l'antécedent de l'autre raiſon ; c'eſt ce que l'on veut exprimer quand on dit que les quotiens ſont entr'eux reciproquement comme les diviſeurs.

Remarquez donc que cette expreſſion *réciproquement* a lieu, lorſque deux grandeurs homogenes, c'eſt-à-dire, de même eſpece, ſont proportionnelles à deux grandeurs d'une autre eſpece priſes dans un ordre renverſé. Dans notre exemple les deux grandeurs de même eſpece ſont les diviſeurs, & les deux grandeurs de l'autre eſpece ſont les quotiens.

51. A la place du terme *réciproquement*, on ſe ſert quelquefois de ceux-ci, *en raiſon reciproque*, qui ont le même ſens ; ainſi dans notre exemple on peut dire que les quotiens ſont en raiſon réciproque des diviſeurs. On dit auſſi quelquefois *en raiſon renverſée*, & encore *en raiſon indirect* ; ce qui ſignifie préciſément la même choſe qu'*en raiſon réciproque*.

52. Remarquez encore que dans l'exemple propoſé les deux termes qui viennent de la premiere diviſion, c'eſt-à-dire, le diviſeur & le quotient ſont les extrêmes de la proportion, & les deux termes de la ſeconde ſont les moyens ; c'eſt pourquoi on peut dire que le diviſeur & le quotient de la premiere diviſion, ſont réciproques au diviſeur & au quotient de la ſeconde ; mais on ne doit pas dire que le diviſeur & le quotient d'une diviſion, ſont entr'eux réciproquement comme le diviſeur & le quotient de l'autre diviſion : ce qui ſignifieroit que le premier diviſeur eſt au premier quotient, comme le ſecond quotient eſt au ſecond diviſeur.

On peut appliquer ces notions & ces remarques aux maſſes & aux viteſſes de deux corps qui ont des mou-

vemens égaux : car dans ce cas d'égalité de mouvemens, les masses sont entr'elles réciproquement comme les vitesses, ou, ce qui revient au même, les masses sont réciproquement proportionnelles aux vitesses, & la masse & la vitesse d'un corps sont réciproques à la masse & à la vitesse d'un autre corps.

Afin de faire voir l'utilité des deux théorêmes precedens, nous nous en servirons pour démontrer les propositions suivantes : nous allons commencer à les employer pour prouver que l'on peut faire plusieurs changemens dans l'ordre des termes d'une proportion sans la détruire.

53. 1°. En mettant le premier conséquent à la place du second antécedent, & le second antécedent à la place du premier conséquent ; ou, ce qui est la même chose, en faisant changer de place aux deux moyens : ce changement s'appelle *alternando*, ou bien *permutando* : par exemple, dans la proportion 8 . 4 :: 6 . 3 on peut mettre 4 & 6 à la place l'un de l'autre en cette maniere, 8 . 6 :: 4 . 3. De même en lettres, si $a . b :: c . d$, on pourra conclurre *alternando*, $a . c :: b . d$; car afin que cette derniere proportion soit vraye, il suffit que ad produit des extrêmes soit egal à bc produit des moyens. Or il est évident que $ad = bc$: car on suppose que $a . b :: c . d$; donc par le premier théorême $ad = bc$.

54. On peut de même faire changer de place aux extrêmes, c'est-à-dire, les mettre à la place l'un de l'autre : par exemple, si $a . b :: c . d$, il suit que $d . b :: c . a$. Ce changement peut aussi être appellé *alternando*. La démonstration est la même que la précedente.

55. 2°. En mettant dans l'une & l'autre raison l'antécedent à la place du conséquent, & le conséquent à la place de l'antécedent : ce changement est appellé *invertendo* ; par exemple, si 8 . 4 :: 6 . 3, on pourra

conclurre que $4 . 8 :: 3 . 6$. En général si $a . b :: c . d$; je dis que $b . a :: d . c$: car afin que $b . a :: d . c$, il suffit que bc produit des extrêmes soit égal à ad produit des moyens. Or puisque l'on suppose que $a . b :: c . d$,
* 40. il est nécessaire * que $ad = bc$ ou que $bc = ad$.

56. Il est visible que si $a . b :: c . d$, on peut sans détruire la proportion, mettre la raison de c à d la premiere ; & on aura $c . d :: a . b$, & *invertendo* $d . c :: b . a$. Or les termes de cette derniere proportion sont dans un ordre renversé par rapport à la premiere $a . b :: c . d$. On peut donc toûjours prendre les termes d'une proportion dans un ordre renversé sans la détruire, c'est-à-dire, que si $a . b :: c . d$, on pourra en conclurre que $d . c :: b . a$. Ce changement peut être aussi appellé *invertendo*.

57. Il paroît par ces deux cas, que l'on ne détruit pas une proportion, pourvû que les extrêmes demeurent toûjours les mêmes aussi-bien que les moyens, ou pourvû que les deux termes qui étoient les extrêmes deviennent moyens, & les deux moyens deviennent extrêmes : mais on détruiroit la proportion si un des extrêmes seulement devenoit moyen : par exemple, ayant la proportion $a . b :: c . d$, on ne peut pas conclurre que $a . b :: d . c$, ou que $b . a :: c . d$.

Nous allons aussi exposer trois cas dans lesquels on ne détruit pas la proportion, quoique l'on augmente ou que l'on diminuë d'une certaine maniere les deux antécedens, ou les deux conséquens de la proportion.

58. 1°. Lorsqu'on multiplie les deux antécedens, ou les deux conséquens par une même grandeur : par exemple, si $a . b :: c . d$, il suit que $2a . b :: 2c . d$, & que $a . 2b :: c . 2d$. Afin de donner une démonstration générale, nous nous servirons de la lettre n pour marquer le multiplicateur ; il faut donc prouver que si $a . b :: c . d$, il s'ensuit que $na . b :: nc . d$. Afin que $na . b :: nc . d$, il suffit que nad produit des extrêmes soit égal à ncb ou nbc

produit des moyens. Or ces deux produits sont égaux: car puisque par l'hypothese *a . b :: c . d*, il faut que *ad* soit égal à *bc*; & par conséquent en multipliant l'un & l'autre par *n*, les produits *nad* & *nbc* seront encore égaux. On prouve de la même maniere que *a . nb :: c . nd.* On voit par là qu'on peut doubler, tripler, &c. les deux antécedens, ou les deux conséquens d'une proportion sans la détruire.

59. On peut aussi multiplier l'antécedent & le conséquent de la premiere ou de la seconde raison par une même grandeur : par exemple si on a la proportion *a . b :: c . d*, on peut en conclurre *na . nb :: c . d* ou bien *a . b :: nc . nd.* La démonstration est la même que dans l'article précedent. D'ailleurs ce changement est une suite manifeste du septiéme principe * dans lequel nous avons fait voir que quand on multiplie deux grandeurs par une troisiéme, les produits ont entr'eux une raison égale à celle des deux premieres grandeurs avant la multiplication. On pourroit nommer ces deux changemens *multiplicando.* * 18.

60. 2°. Lorsque l'on ajoûte les conséquens aux antécedens, en gardant toûjours les mêmes conséquens : On appelle ce changement *componendo* ou *addendo :* par exemple, si 8 . 4 :: 6 . 3, on pourra conclurre que 8+4 . 4 :: 6+3 . 3, ou bien, 12 . 4 :: 9 . 3. En général si *a . b :: c . d*, je dis que *a+b . b :: c+d . d*: Car afin que *a+b . b :: c+d . d*, il suffit que *ad+bd* produit des extrêmes, soit égal à *bc+bd* produit des moyens. Or *ad+bd* est égal à *bc+bd* : car puisque l'on suppose que *a . b :: c . d*, il faut que *ad* soit égal à *bc* *, & par conséquent *ad+bd=bc+bd.* * 40.

61. On peut de même ajoûter l'antécedent de chaque raison au conséquent : par exemple, si *a . b :: c . d*, je puis en conclurre que *a . b+a :: c . d+c*. on peut aussi appeller ce changement *componendo* ou *addendo* : il se prouve de la même maniere.

62. 3° Quand on ôte les conséquens des antécedens, en laissant toûjours les mêmes conséquens : on appelle ce changement *dividendo* ou *substrahendo* : par exemple, si 12 . 4 : : 9 . 3, on pourra conclurre que 12—4 . 4 : : 9—3 . 3, ou bien, 8 . 4 :: 6 . 3. En général si $a . b :: c . d$, je dis que $a-b . b :: c-d . d$: car afin que cette derniere proportion soit vraye, il suffit que $ad-bd$ produit des extrêmes soit égal à $bc-bd$ qui est le produit des moyens. Or $ad-bd=bc-bd$; car puisque l'on suppose que $a . b :: c . d$, il faut que $ad=bc$, & par conséquent $ad-bd=bc-bd$.

63. On peut pareillement retrancher l'antécedent du conséquent : par exemple si $a . b :: c . d$, je dis que $a . b-a :: c . d-c$. ce changement peut encore être appellé *dividendo* ou *substrahendo*, & se démontre de la même maniere.

66. Il ne sera pas inutile de voir tous ces changemens réunis, afin de les retenir & d'en remarquer la différence.

On suppose que $a . b :: c . d$.

Donc *alternando*, $a . c :: b . d$, ou bien, $d . b :: c . a$.

invertendo, $b . a :: d . c$, ou bien, $d . c :: b . a$.

multiplicando, { $an . b :: cn . d$, ou bien, $a . bn :: c . dn$. $an . bn :: c . d$, ou bien, $a . b :: cn . dn$. }

componendo. $a+b . b :: c+d . d$, ou bien, $a . b+a :: c . d+c$.

dividendo, $a-b . b :: c-d . d$, ou bien, $a . b-a :: c . d-c$.

69. Nous avons dit * que dans toute multiplication, le produit contient autant de fois le multiplicande que le multiplicateur contient l'unité, ainsi la raison du produit au multiplicande est égale à celle du multiplicateur à l'unité. On a donc la proportion, le produit est au multiplicande, comme le multiplicateur est à l'unité

*Liv. I. Art. 141

l'unité, si par exemple, on multiplie 5 par 3, le produit est 15 : ce qui fait la proportion, 15 . 5 :: 3 . 1, ou bien *invertendo*, 1 . 3 :: 5 . 15. De même en lettres, multipliant a par b, le produit est ab : ce qui donne la proportion, $ab . a :: b . 1$, ou bien, $1 . b :: a . ab$.

70. Nous avons aussi fait voir * que dans toute division, le dividende contient autant de fois le diviseur, que le quotient contient l'unité; d'où suit la proportion, le dividende est au diviseur, comme le quotient est à l'unité : par exemple, si on divise 24 par 6, le quotient sera 4; on aura donc la proportion 24 . 6 :: 4 . 1, ou bien *invertendo*, 1 . 4 :: 6 . 24 : c'est la même chose en lettres.

* Liv. I. art. 161

La *regle de trois*, qu'on appelle aussi *regle d'or*, dépend du premier théorême; elle est d'une si grande utilité dans les sciences & dans l'usage de la vie civile, que nous ne pouvons pas nous dispenser de l'expliquer ici.

71. Cette regle consiste à trouver un quatriéme terme qui soit proportionnel à trois autres qui sont connus : par exemple, supposé qu'on propose cette question : si quinze ouvriers ont fait vingt toises d'ouvrage, combien quarante-cinq ouvriers en feront-ils dans le même tems ? elle se résout par la regle de trois, parce qu'il s'agit de trouver un quatriéme terme proportionnel à trois autres connus qui sont les quinze ouvriers, vingt toises & quarante-cinq ouvriers. Le quatriéme terme que l'on cherche est le nombre de toises que les quarante-cinq ouvriers feront.

72. Afin de trouver ce quatriéme terme, on doit d'abord arranger ces quatre termes en proportion, en mettant x à la place du quatriéme terme cherché, en cette maniere, $15^{ou}. 20^{t} :: 45^{ou}. x^{t}$, ou *alternando*, $15^{ou}. 45^{ou} :: 20^{t}. x^{t}$: cette derniere disposition est plus naturelle, parce que l'on y compare les termes homogenes l'un avec l'autre; c'est-à-dire, dans cet exemple,

les ouvriers avec les ouvriers, & les toises avec les toises; il est donc à propos de garder cette disposition dans laquelle les deux termes homogenes connus sont les deux premiers termes de la proportion.

Après avoir arrangé les termes, il faut observer les deux regles suivantes.

1°. Multiplier les deux moyens de cette proportion l'un par l'autre : le produit sera 900.

2°. Diviser ce produit par le premier terme 15; & le quotient 60 sera le quatriéme terme cherché.

Voici encore un autre exemple, 300 personnes ont dépensé 1043 livres; on demande combien 60 personnes dépenseront à proportion dans le même tems? Ayant arrangé les quatre termes en proportion de la maniere suivante, 300^{p}. 60^{p} :: 1043^{l}. x; je multiplie les deux moyens 60 & 1043 l'un par l'autre; le produit est 62580 : je divise ensuite ce produit par le premier terme 300, & je trouve au quotient 208, & le reste 180 que je mets en fraction; ainsi le quatriéme terme cherché est $208+\frac{180}{300}$.

73. Dans ces deux exemples les deux derniers termes homogenes sont entr'eux comme les deux premiers; c'est-à-dire, que dans le premier exemple, les 15 ouvriers sont à 45 ouvriers, comme le nombre de toises faites par les 15 ouvriers, est au nombre des toises faites par les 45 ouvriers : & de même dans le second exemple, 300 personnes sont à 60, comme le nombre de livres dépensées par 300 personnes, est au nombre de livres dépensées par 60.

74. Mais il y a des questions où les deux derniers termes homogenes sont entr'eux réciproquement comme les deux premiers; soit par exemple, la question suivante : 40 hommes ont fait un ouvrage en 25 jours; on demande en combien de tems 50 hommes feront le même ouvrage. Les deux termes homogenes connus de cette question sont 40 & 50, dont le premier est

moindre que le ſecond ; par conſéquent afin que les deux derniers termes homogenes 25 & x fuſſent entr'eux comme les deux premiers, il faudroit que le nombre 25 qui répond à 40, fût auſſi moindre que x qui répond à 50 : ce qui n'eſt pas vrai, parce que 40 hommes doivent employer plus de tems à faire un ouvrage que 50 hommes ; c'eſt pourquoi les deux nombres de jours 25 & x ne ſont pas entr'eux directement comme 40 & 50 : mais ces deux nombres 25 & x ſont entre eux reciproquement comme 40 & 50, c'eſt-à-dire *, que 40 hommes ſont à 50, comme le nombre x de jours employez par les 50 hommes, eſt au nombre de jours employez par les 40. Il faut donc arranger les termes de cette proportion de la maniere ſuivante, $40^h. 50^h :: x^j. 25^j$.

* 50.

75. Les regles de trois dans leſquelles les deux derniers termes homogenes ſont entr'eux comme les deux premiers, ſont appellées *directes* ; & celles où les deux derniers termes homogenes ſont entr'eux réciproquement comme les deux premiers, ſont appellées *indirectes*.

76. Afin de réſoudre les regles indirectes, il faut après avoir diſpoſé les termes en proportion, comme on vient de le faire dans le dernier exemple, multiplier les deux extrêmes l'un par l'autre ; & diviſer enſuite le produit par le moyen connu : dans l'exemple propoſé, il faut multiplier 40 par 25 & diviſer le produit 1000 par 50, le quotient 20 eſt le terme cherché.

Voici encore un autre exemple de la regle de trois indirecte : 150 perſonnes ont dépenſé une ſomme d'argent en 60 jours, on demande en combien de tems 100 perſonnes dépenſeront la même ſomme. Dans cet exemple, les deux termes homogenes connus ſont 150 & 100, dont le premier eſt plus grand que le ſecond. Ainſi afin que les deux autres termes homogenes fuſſent entr'eux comme les deux premiers, il faudroit

que 60 qui répond à 150, fût plus grand que le terme cherché x qui répond à 100. Or il est clair que le terme 60 n'est pas plus grand que x, puisque 150 personnes doivent dépenser une certaine somme en moins de tems que 100 personnes; par conséquent les deux nombres de jours 60 & x ne sont pas entr'eux directement comme 150 & 100 : mais ces deux nombres 60 & x sont entr'eux réciproquement comme 150 & 100, en sorte que 150 personnes sont à 100, comme le nombre x de jours est à 60; par conséquent il faut arranger les termes en cette maniere, $150^{p}. 100^{p} :: x^{j}. 60^{j}$. On trouvera la solution de cette regle, en multipliant les deux extrêmes 150 & 60 l'un par l'autre, & divisant le produit 9000 par 100 qui est le moyen connu.

77. Il suit de ce que l'on a dit sur les regles de trois directes & indirectes, qu'après avoir arrangé les termes en proportion, il faut multiplier les deux moyens l'un par l'autre, quand les deux moyens sont connus, & diviser le produit par l'extrême connu. Au contraire, lorsque les deux extrêmes sont connus, il faut les multiplier l'un par l'autre, & diviser le produit par le moyen connu; & le quotient dans l'un & l'autre cas sera le terme cherché proportionnel aux trois autres : c'est ce que l'on va prouver dans la démonstration suivante, dans lequelle on supposera d'abord que les deux moyens & le premier extrême sont connus.

DEMONSTRATION DE LA REGLE DE TROIS.

78. Soient les trois premiers termes a, b, c; en sorte que l'on ait la proportion $a . b :: c . x$. Il s'agit de démontrer que la grandeur x est égale au produit des moyens b & c, divisé par le premier terme a; c'est-à-dire, que $x = \frac{bc}{a}$. Je le démontre ainsi : puisque $a . b :: c . x$; donc par le premier théorême $ax = bc$

par conséquent si on divise chacun de ces produits égaux ax & bc par la même grandeur, les quotiens seront encore égaux ; je divise donc ces deux produits par a ; on aura $\frac{ax}{a} = \frac{bc}{a}$: or $\frac{ax}{a} = x$ * donc $x = \frac{bc}{a}$.

*Liv. I. art. 166.

Si les deux extrêmes & un moyen étoient connus, comme dans la regle de trois indirecte, on auroit la proportion $a \,.\, b :: x \,.\, c$, d'où l'on conclurroit que $ac = bx$, & que par conséquent $\frac{ac}{b} = \frac{bx}{b}$. Or $\frac{bx}{b} = x$. Donc $\frac{ac}{b} = x$ ou $x = \frac{ac}{b}$: c'est-à-dire, que dans ce cas le terme cherché est égal au produit des extrêmes divisé par le moyen connu.

COROLLAIRE.

79. Il suit de-là que toutes les fois que l'on a une fraction, dont le numérateur est le produit de deux grandeurs, on peut toûjours faire une proportion dont le premier terme soit le dénominateur de la fraction, les deux moyens soient les grandeurs qui sont les deux racines du produit qui sert de numérateur à la fraction ; enfin le quatriéme terme soit la fraction même : par exemple, on peut faire de la fraction $\frac{bc}{a}$ la proportion suivante, $a \,.\, b :: c \,.\, \frac{bc}{a}$.

Cette proportion est vraye, puisque nous venons de démontrer que le quatriéme terme proportionnel aux trois autres a, b, c, est égal au produit des moyens b & c, divisé par le premier terme a : ce corollaire est d'usage dans plusieurs occasions.

80. On peut donner une autre démonstration fort simple de la regle de trois, qui ne suppose pas la connoissance du premier théorême : nous en allons faire l'aplication au premier exemple rapporté ci-dessus pour la regle de trois directe : 15 ouvriers ayant fait 20 toises pendant un certain tems, on demande combien en feront 45 ouvriers dans le même tems : pour le trouver, je considere que si un seul ouvrier avoit fait

20 toises, 45 ouvriers en feroient 45 fois 20 dans le même tems : il faudroit donc multiplier 20 par 45, & le produit 900 exprimeroit le nombre des toises que feroient 45 ouvriers. Mais ce n'est pas un ouvrier seul qui a fait les 20 toises : il n'en a fait que la quinziéme partie, puisqu'il y avoit 15 ouvriers qui ont tous travaillé également à ces 20 toises. Par conséquent les 45 ouvriers ne feront pareillement que la quinziéme partie de 900 toises : il faut donc chercher la 15e partie de 900. Or pour trouver la quinziéme partie de 900 il faut diviser ce nombre par 15. D'ailleurs 900 est le produit des moyens 45 & 20; ainsi pour trouver le quatriéme terme cherché il faut multiplier les moyens l'un par l'autre, & diviser ensuite le produit par le premier terme.

81. La regle de trois indirecte peut se prouver par un raisonnement à peu près semblable. 10 personnes ont consommé une certaine quantité de vivres en 60 jours; on veut sçavoir en combien de jours 12 personnes feront la même consommation. Ces quatre termes font la proportion suivante, $10 . 12 :: x . 60$. Or pour trouver le troisiéme terme x que l'on cherche, il faut, suivant la méthode expliquée ci-dessus, multiplier les deux extrêmes 10 & 60 l'un par l'autre, & diviser le produit 600 par le moyen connu 12 : ce qui donnera le quotient 50 qui est le troisiéme terme cherché. Voici la raison de cette méthode : si un seul homme avoit consommé la provision de vivres en 60 jours, 12 hommes feroient la même consommation pendant la douziéme partie de 60 jours. Or pour avoir la douziéme partie de 60 jours il faut diviser 60 par 12; mais comme par la supposition ce sont 10 personnes qui ont épuisé la provision en 60 jours, c'est la même chose que si un seul homme l'avoit consommée en 10 fois 60 jours : il ne faut donc pas seulement prendre la douziéme partie de 60, mais plutôt

celle de 10 fois 60 : c'est-à-dire, qu'il faut multiplier 60 par 10, & diviser le produit par 12.

82. Les regles de trois dont nous avons parlé jusqu'à présent, sont appellées *simples*, parce qu'elles ne renferment que quatre termes : il y en a qu'on appelle *composées* ; ce sont celles dans lesquelles il y a plus de quatre termes, comme dans la question suivante : 20 hommes ont fait 12 toises en 8 jours : on demande combien 40 hommes feront de toises en 24 jours. Nous ne nous arrêterons pas à expliquer ces regles, parce qu'on n'en aura pas besoin dans la Géometrie, & que d'ailleurs on ne les employe pas souvent dans l'usage ordinaire de la vie civile.

THEOREME IV.

83. *Dans une suite de raisons égales la somme des antécedens est à la somme des conséquens, comme un seul antécedent est à son conséquent.*

Soient les raisons égales $\frac{6}{3}=\frac{8}{4}=\frac{10}{5}=\frac{14}{7}=\frac{16}{8}$, &c. la somme des antécedens $6+8+10+14+16=54$ est à la somme des conséquens $3+4+5+7+8=27$, comme l'antécedent 6 est à son conséquent 3, ou comme 8 est à 4, &c.

DEMONSTRATION.

On peut concevoir l'antécedent total 54 partagé dans les mêmes parties qui étoient séparées avant l'addition ; sçavoir 6, 8, 10, 14, 16 : de même on peut concevoir le conséquent total 27 partagé dans les mêmes parties qui étoient aussi séparées avant l'addition ; sçavoir, 3, 4, 5, 7, 8. Or par l'hypothese les antécedens particuliers qui sont les parties de l'antécedent total, contiennent chacun autant de fois, c'est-à dire, deux fois, leurs conséquens qui sont les parties du conséquent total ; ainsi l'antécedent total ou la somme des antécedens contient deux fois la somme des conséquens, comme un des antécedens contient

deux fois ſon conſéquent ; donc la ſomme des antécedens eſt à la ſomme des conſéquens, comme un antécedent eſt à ſon conſéquent.

On peut démontrer par le même raiſonnement que ſi chacun des antécedens particuliers contient trois fois ſon conſéquent ; la ſomme des antécedens contiendra trois fois la ſomme des conſéquens. Ainſi des autres cas.

AUTRE DEMONSTRATION.

Suppoſons que les raiſons égales ſoient $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{f}{g}=\frac{m}{n}$, il faut prouver que $a+c+f+m \,.\, b+d+g+n :: a \,.\, b$. Cette proportion eſt vraye ſi le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens. Or $ab+bc+bf+bm$ produit des extrêmes, eſt égal à $ab+ad+ag+an$ produit des moyens : ce que je prouve en faiſant voir que chacune des parties du premier produit eſt égale à chaque partie du ſecond. 1°. La partie ab du premier produit eſt la même que la partie ab du ſecond ; & par conſéquent ces deux parties ſont égales. 2°. Les deux raiſons $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ ſont ſuppoſées égales ; donc elles forment une proportion : ainſi ad produit des extrêmes, eſt égal à bc produit des moyens ; donc les deux parties bc & ad ſont encore égales. 3°. Les deux raiſons $\frac{a}{b}$ & $\frac{f}{g}$ ſont ſuppoſées égales, donc elles forment une proportion ; ainſi ag produit des extrêmes, eſt égal à bf produit des moyens : par conſéquent les deux parties bf & ag ſont encore égales. Enfin les deux raiſons $\frac{a}{b}$ & $\frac{m}{n}$ ſont auſſi ſuppoſées égales ; donc elles forment une proportion : ainſi les deux parties bm & an ſont égales : par conſéquent le produit total $ab+bc+bf+bm$ eſt égal au produit total $ab+ad+ag+an$; d'où ſuit la proportion $a+c+f+m \,.\, b+d+g+n :: a \,.\, b$. Ce qu'il falloit demontrer.

COROLLAIRE.

84. Dans toute progreſſion géometrique la ſomme des antécedens eſt à la ſomme des conſéquens, comme un ſeul antécedent eſt à ſon conſéquent.

C'eſt une conſéquence évidente du précedent théorême, puiſqu'une progreſſion géometrique n'eſt qu'une ſuite de raiſons égales, donc chaque terme eſt conſéquent d'une raiſon & antécedent de la ſuivante, excepté le premier & le dernier, comme on l'a dit: par exemple, dans cette progreſſion $\div\!\div$ 3 . 6 . 12 . 24 . 48, &c. la ſomme des antécedens $3+6+12+24=45$, eſt à la ſomme des conſéquens $6+12+24+48=90$, comme 3 eſt à 6. De même en lettres la progreſſion $\div\!\div\, a . b . c . d . e . f$, &c. donne la proportion ſuivante:

$$\frac{a+b+c+d+e}{b+c+d+e+f}=\frac{a}{b}$$

THEOREME V.

85. *Si on multiplie les termes d'une proportion par ceux d'une autre proportion pris dans le même ordre; c'eſt-à-dire, le premier de l'une par le premier de l'autre, le ſecond par le ſecond, le troiſiéme par le troiſiéme, le quatriéme par le quatriéme; les produits ſeront encore en proportion.*

Soient les deux proportions, $a . b :: c . d$ & $e . f :: g . h$, ſi on multiplie les termes de la premiere par ceux de la ſeconde, les produits ae, bf, cg, dh, ſont encore en proportion; en ſorte que $ae . bf :: cg . dh$. Pour le faire voir, il n'y a qu'à démontrer * que le produit des extrêmes $aedh$ ou $adeh$ eſt égal au produit des moyens $bfcg$ ou $bcfg$; il s'agit donc de prouver que $adeh=bcfg$. * 41.

DEMONSTRATION.

Par l'hypotheſe $a . b :: c . d$; donc $ad=bc$: de même à cauſe de l'autre proportion, $e . f :: g . h$, on a encore

l'égalité $eh = fg$; par conséquent les deux grandeurs égales ad & bc étant multipliées l'une par eh & l'autre par fg, les deux produits $adeh$ & $bcfg$ seront encore égaux. Ce qu'il falloit démontrer.

On peut démontrer par la même méthode que si on multiplie les termes de plusieurs proportions, par exemple de trois, les uns par les autres pris dans le même ordre, les produits seront encore proportionnels.

COROLLAIRE.

86. Si on a la proportion $a . b :: c . d$, les quarrez de ces grandeurs sont encore en proportion : c'est-à-dire, que $a^2 . b^2 :: c^2 . d^2$. C'est une suite évidente de ce théorême ; puisque les termes de cette seconde proportion sont les produits des termes de la premiere, multipliez par ceux de la même proportion. De même si on multiplie les termes de la proportion $a^2 . b^2 :: c^2 . d^2$ par ceux de la premiere $a . b :: c . d$, on aura cette autre proportion $a^3 . b^3 :: c^3 . d^3$: & si on multiplioit encore les termes de cette derniere par ceux de la premiere, on auroit $a^4 . b^4 :: c^4 . d^4$, & ainsi de suite ; en sorte que l'on peut dire en général que si ces quatre grandeurs sont proportionnelles, les puissances semblables de ces grandeurs sont aussi proportionnelles : c'est-à-dire, que si $a . b :: c . d$, on aura aussi la proportion $a^m . b^m :: c^m . d^m$: a^m signifie que a est élevé à une puissance marquée par la lettre m qui peut représenter 2, 3, 4, 5, & tous les nombres possibles : il en est de même de b^m, c^m, & d^m.

87. La proposition réciproque de ce corollaire est encore vraye ; c'est-à-dire, que si les puissances semblables de quatre grandeurs sont proportionnelles, les grandeurs elles-mêmes qui sont les racines semblables de ces puissances, sont aussi proportionnelles : par exemple, si $a^3 . b^3 :: c^3 . d^3$, on aura aussi la proportion $a . b :: c . d$: car ayant la proportion $a^3 . b^3 :: c^3 . d^3$, on en conclut l'égalité $a^3 d^3 = b^3 c^3$. Or ces deux pro-

duits $a^3 d^3$ & $b^3 c^3$ étant égaux, leurs racines ſemblables ad & bc ſont égales; par conſéquent $a . b :: c . d$*. * 42.

88. Remarquez que dans le corollaire précedent nous n'avons pas dit que deux puiſſances ſemblables ſont proportionnelles à leurs racines: ce qui ſeroit faux: par exemple, il n'eſt pas vrai que $a^2 . b^2 :: a . b$: cela paroît évidemment dans les nombres: car ſi on prend 36 & 4, qui ſont les quarrez de 6 & de 2, il eſt clair que 36 n'eſt pas à 4 comme 6 eſt à 2.

Nous avons prouvé * que le produit du quotient multiplié par le diviſeur eſt égal au dividende; ainſi m étant ſuppoſé le quotient de a diviſé par b, le produit bm eſt égal à l'antécedent a qui eſt le dividende; par conſéquent ſi $\frac{a}{b} = m$, on peut en conclurre que $a = bm$. De même ſi $\frac{c}{d} = n$, il s'enſuit que $c = dn$. *Liv. I. art. 163

THEOREME VI.

89. *Si on multiplie les termes de deux raiſons l'un par l'autre; l'antécedent par l'antécedent, & le conſéquent par le conſéquent, la raiſon qui ſe trouvera entre le produit des antécedens & celui des conſéquens, ſera le produit des deux raiſons.*

Soient les deux raiſons $\frac{15}{3}$ & $\frac{8}{4}$ dont on multiplie les antécedens l'un par l'autre, de même que les conſéquens; le produit des antécedens eſt 120, celui des conſéquens eſt 12: la raiſon de ces deux produits eſt $\frac{120}{12}$ dont la valeur eſt 10 *: je dis que 10 eſt le produit des valeurs des deux premieres raiſons: car $\frac{15}{3} = 5$ & $\frac{8}{4} = 2$: or 10 eſt le produit de 5 par 2; cette raiſon $\frac{120}{12}$ eſt donc le produit des deux premieres $\frac{15}{3}$ & $\frac{8}{4}$. En général le produit des deux raiſons $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ eſt $\frac{ac}{bd}$. * 25.

DEMONSTRATION.

Soit $\frac{a}{b} = m$ & $\frac{c}{d} = n$; donc $a = bm$ & $c = dn$; par conſéquent en multipliant les deux grandeurs égales a & bm l'une par c, & l'autre par dn qui ſont deux autres

quantitez égales, les produits ac & $bmdn$ ou $bdmn$ seront encore égaux ; on aura donc $ac=bdmn$, & en divisant l'un & l'autre produit par bd, on aura $\frac{ac}{bd}=\frac{bdmn}{bd}$: mais

* Liv. I. art. 166

$\frac{bdmn}{bd}=mn$ * ; donc $\frac{ac}{bd}=mn$. Or mn est le produit des valeurs des raisons $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$; par conséquent $\frac{ac}{bd}$ est le produit des raisons $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$. Ce qu'il falloit demontrer.

COROLLAIRE.

90. S'il y avoit plus de deux raisons, on prouveroit de la même maniere qu'en multipliant tous les antécedens les uns par les autres, & les conséquens aussi, la raison qu'il y auroit entre le produit des antécedens & celui des conséquens seroit le produit des raisons : par exemple, soient les trois raisons $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{f}{g}$: je dis que la raison $\frac{acf}{bdg}$ est le produit des trois premieres : car on vient de faire voir que la raison $\frac{ac}{bd}$ est le produit des deux $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$. Donc pareillement $\frac{acf}{bdg}$ est aussi le produit des deux raisons $\frac{ac}{bd}$ & $\frac{f}{g}$.

91. On peut remarquer que quand les antécedens des raisons qu'on multiplie sont plus petits que les conséquens, le produit qui vient de la multiplication est plus petit que les raisons qu'on a multipliées : par exemple, si on multiplie les raisons $\frac{2}{6}$ & $\frac{5}{10}$, le produit $\frac{10}{60}$ est une raison plus petite que $\frac{2}{6}$, puisque l'antécedent 10 du produit n'est que la sixiéme partie de son conséquent 60, au lieu que l'antécedent 2 est le tiers de son conséquent 6. On pourra voir la raison de cette remarque dans le Traité des Fractions.

DES RAISONS COMPOSE'ES.

92. Une *raison composée* est le produit de deux ou de plusieurs raisons : par exemple, $\frac{ac}{bd}$ est la raison composée des raisons $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$: de même $\frac{acf}{bdg}$ est un rapport composé des trois raisons $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{f}{g}$.

93. Les rapports de la multiplication desquels résulte la raison composée, s'appellent *raisons composantes* ou *simples* : ainsi dans le premier exemple qu'on vient d'apporter, $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ sont les raisons composantes de $\frac{ac}{bd}$, & de même dans le second exemple, $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{f}{g}$ sont les raisons composantes de $\frac{acf}{bdg}$.

94. Lorsqu'il n'y a que deux raisons composantes & qu'elles sont égales, la raison composée est appellée *doublée* : par exemple, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, la raison composée $\frac{ac}{bd}$ est doublée. En nombres, les raisons $\frac{12}{3}$ & $\frac{8}{2}$ étant égales, la raison composée $\frac{96}{6}$ est doublée.

95. Lorsqu'il y a trois raisons composantes, & qu'elles sont égales, la raison composée est appellée *triplée* : par exemple, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{f}{g}$, la raison composée $\frac{acf}{bdg}$ est triplée : de même la raison $\frac{30}{240}$ est triplée des trois raisons égales $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{5}{10}$.

96. Afin qu'une raison soit doublée, il n'est pas nécessaire que les raisons composantes soient exprimées par des termes differens, comme dans les deux exemples précedens, elles peuvent être la même raison exprimée par les mêmes termes : par exemple, la raison $\frac{36}{4}$ est doublée des raisons $\frac{6}{2}$ & $\frac{6}{2}$: la raison $\frac{9}{25}$ est doublée des rapports $\frac{3}{5}$ & $\frac{3}{5}$. En lettres, la raison $\frac{aa}{bb}$ est doublée des rapports $\frac{a}{b}$ & $\frac{a}{b}$.

97. De même une raison triplée peut être composée de trois raisons égales qui ne soient que la même raison exprimée par les mêmes termes : par exemple, la raison $\frac{8}{64}$ est triplée des rapports $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{4}$ & $\frac{2}{4}$. La raison $\frac{1}{27}$ est triplée des trois raisons $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{3}$. En lettres, $\frac{aaa}{bbb}$ est un rapport triplé de ces trois $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{b}$ & $\frac{a}{b}$.

98. Au lieu de dire que la raison $\frac{36}{4}$ est doublée des raisons $\frac{6}{2}$ & $\frac{6}{2}$, on dit le plus souvent que cette raison $\frac{36}{4}$ est doublée de la raison $\frac{6}{2}$: ce qui doit s'entendre

en multipliant l'antécedent 6 par lui-même, & le conséquent 2 aussi par lui-même, ou, ce qui revient au même, en prenant le quarré de 6 & celui de 2; ce qui fait la raison doublée $\frac{36}{4}$. C'est la même chose pour les autres exemples : la raison $\frac{9}{25}$ est dite doublée de celle de $\frac{3}{5}$, & enfin $\frac{aa}{bb}$ est un rapport doublé de $\frac{a}{b}$.

99. On s'explique de la même maniere, quand il s'agit de la raison triplée : par exemple, on dit que la raison $\frac{8}{64}$ est triplée de la raison $\frac{2}{4}$: celle de $\frac{1}{27}$ est triplée de $\frac{1}{3}$, & celle de $\frac{aaa}{bbb}$ est triplée de $\frac{a}{b}$. On voit bien que ces raisons triplées se trouvent en prenant le cube de l'antécedent & le cube du conséquent de la raison dont elles sont triplées : telle est la raison $\frac{8}{64}$ que l'on trouve en prenant les cubes de l'antécedent & du conséquent de la raison $\frac{2}{4}$.

100. On peut voir après ce que nous venons de dire, que la raison doublée d'une raison est le quarré de la raison dont elle est doublée : par exemple, la raison doublée de $\frac{6}{2}$ est $\frac{36}{4}$ qui est le quarré de $\frac{6}{2}$, puisque pour avoir cette raison doublée $\frac{36}{4}$, il faut multiplier le rapport $\frac{6}{2}$, par lui-même, d'où il suit que si le rapport $\frac{6}{2}$ est égal à p, la raison doublée $\frac{36}{4} = pp$, parce que les grandeurs $\frac{6}{2}$ & p étant égales, leurs quarrez $\frac{36}{4}$ & pp doivent être égaux.

101. Par la même raison le rapport triplé est le cube de celui dont il est triplé : par exemple, $\frac{8}{64}$ est le cube de $\frac{2}{4}$, puisque pour avoir $\frac{8}{64}$, il faut multiplier d'abord $\frac{2}{4}$ par $\frac{2}{4}$, ce qui donne le quarré $\frac{4}{16}$ qu'il faut encore multiplier par $\frac{2}{4}$, & on aura enfin $\frac{8}{64}$ cube de $\frac{2}{4}$. Il suit aussi de-là que si $\frac{2}{4} = p$, on aura $\frac{8}{64} = ppp$, parce que les deux grandeurs $\frac{2}{4}$ & p étant égales, leurs cubes doivent être égaux.

102. Il y a beaucoup de difference entre une raiſon double & une raiſon doublée, & entre une raiſon triple & une raiſon triplée : une raiſon eſt appellée *double*, lorſque l'antécedent eſt double du conſéquent : ainſi le rapport de 10 à 5 eſt une raiſon double. La raiſon eſt appellée *triple*, lorſque l'antécedent eſt triple du conſéquent : ainſi le rapport de 15 à 5 eſt une raiſon triple ; au contraire la raiſon eſt appellée *ſou-double*, quand l'antécedent eſt la moitié du conſéquent ; & *ſou-triple*, quand l'antécedent eſt le tiers du conſéquent.

On tire de ces notions de la raiſon doublée & triplée une propoſition de grand uſage dans les Mathématiques ; nous allons en faire le théorême ſuivant.

THEOREME VII.

103. *La raiſon qui eſt entre deux quarrez eſt doublée de celle qui eſt entre les racines : la raiſon qui eſt entre les cubes eſt triplée de celle des racines.*

Souvent on énonce ce théorême autrement en diſant que les quarrez ſont en raiſon doublée des racines, & que les cubes ſont en raiſon triplée des racines. Les deux parties de ce théorême ſont des ſuites ſi évidentes des notions qu'on vient de donner des raiſons doublées & triplées, qu'il ſuffira de les expliquer en peu de mots, en apportant des exemples de l'une & de l'autre partie.

DE'MONSTRATION.

I. PARTIE. 64 eſt quarré de 8, & 9 eſt quarré de 3. Or la raiſon de ces deux quarrez qui eſt $\frac{64}{9}$ eſt doublée de celle des racines 8 & 3, puiſque pour avoir la raiſon doublée de $\frac{8}{3}$, il ſuffit de prendre le quarré de l'antécedent & celui du conſéquent. Pareillement 1 eſt le quarré de 1, & 25 eſt le quarré de 5 : or la raiſon $\frac{1}{25}$ eſt doublée de $\frac{1}{5}$ qui eſt le rapport des racines. En

lettres, la raiſon $\frac{aa}{bb}$ eſt doublée de $\frac{a}{b}$ qui eſt le rapport des racines a & b.

II. PARTIE. 8 eſt le cube de 2, & 64 eſt le cube de 4. Or la raiſon de ces deux cubes qui eſt $\frac{8}{64}$ eſt triplée de $\frac{2}{4}$ qui eſt le rapport des racines 2 & 4. De même la raiſon $\frac{1}{125}$ eſt triplée de $\frac{1}{5}$ qui eſt la raiſon des racines. En lettres, aaa eſt le cube de a, & bbb eſt le cube de b: or la raiſon de ces cubes, qui eſt $\frac{aaa}{bbb}$ eſt triplée de $\frac{a}{b}$ qui eſt celle des racines. Ce qu'il falloit demontrer.

Ce que nous avons dit ſur les raiſons doublées & triplées étant aſſez difficile, & en même-tems d'une grande conſéquence, ſur-tout pour la Géometrie, il ne ſera pas inutile d'en répeter la ſubſtance, ſoit pour le mieux comprendre, ſoit pour le mieux retenir.

104. Une raiſon doublée eſt le produit de deux raiſons égales : par exemple, ſi $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ leur produit $\frac{ac}{bd}$ eſt une raiſon doublée des deux raiſons compoſantes égales $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$. Mais s'il n'y a qu'une raiſon compoſante, pour lors le rapport qui en eſt doublé eſt le produit de cette raiſon multipliée par elle-même ; ainſi le rapport doublé de $\frac{a}{b}$ eſt $\frac{aa}{bb}$ qui n'eſt autre choſe que le produit de la raiſon $\frac{a}{b}$ multipliée par elle-même.

105. Les deux raiſons $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ étant égales ſi $\frac{a}{b} = p$, on aura auſſi $\frac{c}{d} = p$: par conſéquent le rapport doublé $\frac{ac}{bd}$ qui eſt le produit des deux raiſons $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ eſt égal à pp produit des deux valeurs ; ainſi ſi p ſignifie 4, la valeur du rapport doublé $\frac{ac}{bd}$ ſera 16.; c'eſt-à-dire, que ac contiendra 16 fois ou ſera 16 fois plus grand que bd. On voit donc que lorſqu'un nombre marque la raiſon de deux grandeurs, le quarré de ce nombre exprime le rapport doublé de cette raiſon : c'eſt pourquoi 3 étant la valeur de la raiſon $\frac{6}{2}$, 9 quarré de 3 exprime le rapport des deux

deux nombres 90 & 10 qui sont en raison doublée de 6 à 2. Je dis que la raison $\frac{90}{10}$ est doublée de $\frac{6}{2}$, parce que ce rapport $\frac{90}{10}$ est le produit des deux raisons égales $\frac{6}{2}$ & $\frac{15}{5}$:

106. Il suit de-là que les quarrez étant entr'eux en raison doublée des racines, si une des racines contient 5 fois l'autre, le quarré de la premiere contiendra 25 fois, ou sera 25 fois plus grand que le quarré de la seconde; si une des racines étoit 8 fois plus grande que l'autre, le quarré de la premiere seroit 64 fois (64 est le quarré de 8) plus grand que le quarré de la seconde, &c.

107. Il faut raisonner de même à proportion touchant la raison triplée, qui n'est autre chose que le produit de trois raisons égales : soient donc les trois raisons égales $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, le rapport triplé est $\frac{ace}{bdf}$. S'il n'y a qu'une seule raison composante; pour en avoir le rapport triplé, il faut d'abord prendre le rapport doublé qui étant multiplié par la raison composante, donne au produit le rapport triplé; ainsi pour avoir le rapport triplé de $\frac{a}{b}$, il faut multiplier $\frac{a}{b}$ par $\frac{a}{b}$, & le produit $\frac{aa}{bb}$ est la raison doublée de $\frac{a}{b}$: ce produit $\frac{aa}{bb}$ étant encore multiplié par $\frac{a}{b}$ on aura $\frac{aaa}{bbb}$ qui est la raison triplée de $\frac{a}{b}$.

109. Puisque les trois raisons $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, sont supposées égales; si $\frac{a}{b}=p$, on aura aussi $\frac{c}{d}=p$ & $\frac{e}{f}=p$; & par conséquent le rapport triplé $\frac{ace}{bdf}$ qui est le produit de ces trois raisons, est égal à ppp ou p^3 produit de leurs valeurs; c'est-à-dire, que p étant la valeur d'une raison composante, le cube de p qui est p^3 est la valeur de la raison triplée; si on suppose donc que $p=4$, la valeur de la raison triplée sera 64, ou, ce qui est la même chose, l'antécedent de cette raison contiendra

64 fois, ou sera 64 fois plus grand que son conséquent; & en général si un nombre exprime combien l'antécedent d'une raison contient son conséquent, le cube de ce nombre marque combien l'antécedent de la raison triplée contient son conséquent; d'où il faut conclurre que les cubes étant en raison triplée de leurs racines; si une des racines est, par exemple, 5 fois plus grande que l'autre, le cube de la premiere est 125 fois (125 est le cube de 5) plus grand que le cube de la seconde.

110. On voit bien que si la valeur d'une raison étoit exprimée par une fraction, le rapport doublé seroit égal au quarré de cette fraction, & le rapport triplé seroit égal au cube de la fraction : soit, par exemple, la raison $\frac{8}{12}$ qui est égale à la fraction $\frac{2}{3}$, puisque 8 contient les deux tiers de 12, le rapport $\frac{64}{144}$ qui est doublé de la raison $\frac{8}{12}$, est égal à $\frac{4}{9}$ quarré de la fraction $\frac{2}{3}$, & le rapport $\frac{512}{1728}$ qui est triplé de $\frac{8}{12}$ est égal à $\frac{8}{27}$ cube de $\frac{2}{3}$.

111. Nous avons supposé que $\frac{4}{9}$ est le quarré de la fraction $\frac{2}{3}$, & que $\frac{8}{27}$ en est le cube, parce que pour avoir le quarré d'une fraction, il faut prendre le quarré du numérateur & celui du dénominateur; & pour en avoir le cube, il faut élever le numérateur & le dénominateur chacun à son cube, comme nous le prouverons dans le Traité des Fractions.

112. Les raisons composantes des raisons doublées sont appellées *sou-doublées*, & celles des raisons triplées sont appellées *sou-triplées*, ainsi si $\frac{ac}{bd}$ est une raison doublée, les deux raisons composantes égales $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ sont chacune sou-doublées de $\frac{ac}{bd}$: le rapport $\frac{a}{b}$ est aussi sou-doublé de $\frac{aa}{bb}$. De même les trois raisons égales $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, sont chacune sou-triplées de $\frac{ace}{bdf}$, & la raison

$\frac{a}{b}$ est aussi sou-triplée de $\frac{aaa}{bbb}$. Au lieu de s'énoncer comme on a fait en rapportant les exemples ci-dessus, on dit ordinairement que a & b sont en raison sou-doublée de ac à bd, ou de aa à bb & qu'ils sont en raison sou-triplée de ace à bdf ou de aaa à bbb.

THEOREME VIII.

113. *Dans toute progression géometrique le quarré du premier terme est au quarré du second, comme le premier est au troisiéme : & le cube du premier terme est au cube du second, comme le premier est au quatriéme.*

Soit la progression géometrique $\div$ 2 . 6 . 18 . 54, &c. 2 est le premier terme, & son quarré est 4 ; 6 est le second terme, & son quarré est 36 : je dis qu'on a la proportion 4 . 36 : : 2 . 18 : & pour les cubes, 8 étant le cube du premier terme 2, & 216 celui du second terme 6 ; on a encore la proportion 8 . 216 : : 2 . 54. En général si on a la progression $\div a . b . c . d . f . g$, &c. on aura $aa . bb :: a . c$: on aura aussi $aaa . bbb :: a . d$.

DEMONSTRATION.

I. PARTIE. Afin que la proportion $aa . bb :: a . c$ soit vraye, il suffit que le produit des extrêmes (aac) soit égal au produit des moyens (abb.) Or je dis que aac égale abb : car à cause de la progression $\div a . b . c . d . f . g$, &c. Il faut que $a . b :: b . c$; donc $ac = bb$; par conséquent si on multiplie ces deux grandeurs égales ac & bb par a, les produits aac & abb seront encore égaux. Ce qu'il falloit démontrer.

II. PARTIE. Pour démontrer cette proportion $a^3 . b^3 :: a . d$, il n'y a qu'à faire voir que le produit des extrêmes (a^3d) est égal au produit des moyens (ab^3). Or je dis que a^3d égale ab^3 : car à cause de la progression $\div a . b . c . d . f . g$, il faut que $a . b :: c . d$; donc $ad = bc$. D'ailleurs on vient de prouver dans la premiere partie que $aac = abb$; par conséquent si on mul-

tiplie ces deux grandeurs égales, la premiere par ad; & la seconde par bc, les produits a^3cd & ab^3c seront aussi égaux: & si on divise ces deux derniers produits par c, les quotiens a^3d & ab^3 seront encore égaux. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

114. Il suit de ce Theorême que la raison qui est entre le premier & le troisiéme terme d'une progression géometrique est doublée de celle qui est entre le premier & le second: ainsi dans l'exemple proposé du Théorême précedent, la raison $\frac{a}{c}$ est doublée de $\frac{a}{b}$; en voici la démonstration: $\frac{a}{c} = \frac{aa}{bb}$; c'est-à-dire, que la raison du premier au troisiéme terme est égale à celle du quarré du premier terme au quarré du second, comme on vient de le démontrer dans la premiere partie de ce Théorême. Or, la seconde de ces raisons, qui est $\frac{aa}{bb}$ est doublée de $\frac{a}{b}$, parce que la raison qui est entre les quarrez est doublée de celle qui est entre les racines; donc la raison $\frac{a}{c}$ égale à $\frac{aa}{bb}$ est aussi doublée de $\frac{a}{b}$.

Au lieu de dire que la raison du premier terme au troisiéme est doublée de celle du premier au second, on s'exprime souvent autrement, en disant que le premier & le troisiéme terme d'une progression sont entr'eux en raison doublée du premier au second.

115. De même la raison du premier au quatriéme terme est triplée de celle du premier au second: car par la seconde partie du Théorême précédent,

$\frac{a}{d} = \frac{a^3}{b^3}$ Or la raison $\frac{a^3}{b^3}$ est triplée de $\frac{a}{b}$ parce que les
* 103. cubes sont en raison triplée des racines *: donc le rapport $\frac{a}{d}$ égal à $\frac{a^3}{b^3}$ est aussi triplé de $\frac{a}{b}$; c'est-à-dire, que la raison du premier au quatriéme terme est triplée de

celle du premier au second, ou bien le premier & le quatriéme terme sont entr'eux en raison triplée du premier au second.

116. On démontreroit comme dans le Théorême précedent, que le quarré du second terme est au quarré du troisiéme, comme le second est au quatriéme, & que le cube du second est au cube du troisiéme, comme le second est au cinquiéme : & de même du troisiéme & du quatriéme. En général dans une progression géometrique le quarré d'un terme quelconque que nous appellerons m, est au quarré de celui qui le suit immédiatement, comme le terme m est au troisiéme depuis m inclusivement, & de même le cube du terme m est au cube du terme suivant, comme ce terme m est au quatriéme depuis m inclusivement.

Il nous reste à parler d'une proprieté de la raison géometrique qui regarde les incommensurables : pour cela nous allons donner les définitions suivantes.

117. Les *exposans* d'une raison sont les plus petits termes qui ont entr'eux un rapport égal à la raison dont ils sont les exposans : par exemple, les exposans de la raison de 3 à 6 sont 1 & 2, parce que 1 & 2 sont les plus petits nombres qui ayent entr'eux la même raison que 3 & 6. Les exposans de la raison $\frac{4}{10}$ sont 2 & 5, parce que 2 & 5 sont les plus petits nombres qui ayent entr'eux le même rapport que 4 & 10. En lettres : la raison $\frac{ad}{bd}$ a pour exposans a & b, parce que le rapport $\frac{a}{b}$ est égàl à $\frac{ad}{bd}$ *, & d'ailleurs a & b sont les plus petits termes ausquels on puisse réduire la raison $\frac{ad}{bd}$. * 18.

118. La raison qui est entre les exposans est appellée *moindre rapport* ; ainsi la raison $\frac{1}{2}$ est le moindre rapport de $\frac{3}{6}$, de même $\frac{2}{5}$ est le moindre rapport de $\frac{4}{10}$. Enfin $\frac{a}{b}$ est le moindre rapport de $\frac{ad}{bd}$. On pourroit

dire auſſi que $\frac{1}{2}$ eſt la raiſon $\frac{3}{6}$ réduite à ſes plus petits termes ; ainſi des autres exemples.

119. La raiſon $\frac{5}{7}$ n'a point d'autres expoſans que 5 & 7, puiſqu'ils ſont les plus petits nombres qui ayent entr'eux une raiſon égale à $\frac{5}{7}$; ainſi $\frac{5}{7}$ eſt un moindre rapport ; il y a donc des raiſons qui peuvent ſe réduire à de plus petits termes, telles que $\frac{3}{6}$ & $\frac{4}{10}$, & d'autres qui ne peuvent être réduites à de plus petits termes, comme $\frac{5}{7}$.

120. Il y a une regle pour diſtinguer les unes des autres, la voici : lorſqu'on peut diviſer l'antécedent & le conſéquent d'une raiſon par un diviſeur commun different de l'unité, cette raiſon peut être réduite à de plus petits termes : par exemple, la raiſon $\frac{12}{8}$ peut être réduite à de plus petits termes, parce que 12 & 8 peuvent être diviſez l'un & l'autre par 4 : cette diviſion étant faite, on trouve les quotiens 3 & 2 qui ſont en
* 19. même raiſon que 12 & 8 *.

121. Mais ſi les deux termes d'une raiſon n'ont point d'autre diviſeur commun que l'unité, pour lors la raiſon ne peut ſe réduire à de plus petits termes : par exemple, la raiſon $\frac{8}{9}$ ne peut être réduite, parce que 8 & 9 n'ont d'autre diviſeur commun que l'unité.

122. Les nombres qui n'ont point d'autre diviſeur commun que l'unité, ſont appellez *premiers entr'eux* : ainſi 8 & 9 ſont premiers entr'eux.

123. Il ſuit de-là que les expoſans d'une raiſon ſont premiers entr'eux ; & réciproquement, les nombres premiers entr'eux ſont des expoſans, puiſque n'ayant point de diviſeur commun autre que l'unité, la raiſon de ces nombres ne peut être réduite à de plus petits termes : par exemple, 8 & 9 étant premiers entr'eux ſont néceſſairement les expoſans de toute raiſon égale à celle de 8 à 9.

124. Nous avons dit qu'il y avoit des raiſons de nombre à nombre, & des raiſons qui ne ſont pas de nombre à nombre qu'on appelle *ſourdes* ou *rapports incommenſurables*. La raiſon de nombre à nombre eſt celle qui peut s'exprimer par des nombres : telle eſt la raiſon d'une ligne d'un pied à une ligne de trois pieds, qui peut être exprimée par $\frac{1}{3}$. La raiſon ſourde eſt celle qu'on ne peut exprimer par des nombres. On démontre en Géométrie que la raiſon qui eſt entre la diagonale & le côté d'un quarré eſt ſourde ; en ſorte qu'il n'y a point de nombres tels qu'ils ſoient, qui ayent entr'eux le même rapport que ces deux lignes. La démonſtration de cette propoſition touchant la diagonale & le côté du quarré ſuppoſe pluſieurs autres propoſitions que nous allons expoſer en peu de mots.

125. Deux raiſons égales ont les mêmes expoſans : par exemple, les deux raiſons $\frac{10}{15}$ & $\frac{6}{9}$ étant égales, ſi 2 & 3 ſont les expoſans de $\frac{10}{15}$, ils le ſont auſſi de $\frac{6}{9}$: car ſi $\frac{6}{9}$ avoit pour expoſans de plus petits nombres que 2 & 3, la raiſon de ces moindres nombres ſeroit égale à celle de $\frac{6}{9}$ dont ils ſeroient les expoſans ; & par conſéquent la raiſon de ces expoſans ſeroit auſſi égale à celle de $\frac{10}{15}$, donc 2 & 3 ne ſeroient pas les expoſans de $\frac{10}{15}$: ce qui eſt contre la ſuppoſition.

126. Toute raiſon doublée de raiſons de nombre à nombre a pour expoſans des nombres quarrez : ſoit, par exemple, la raiſon $\frac{12}{48}$ qui eſt doublée des raiſons égales $\frac{3}{6}$ & $\frac{4}{8}$; je dis que cette raiſon doublée a néceſſairement pour expoſans des nombres quarrez : car les deux raiſons ſimples $\frac{3}{6}$ & $\frac{4}{8}$ dont le rapport $\frac{12}{48}$ eſt doublé, ſont égales par l'hypotheſe ; donc elles ont les mêmes expoſans ; ainſi 1 & 2 étant les expoſans de $\frac{3}{6}$, ils ſont auſſi les expoſans de $\frac{4}{8}$. Cela

posé, les deux raisons $\frac{3}{6}$ & $\frac{4}{8}$ sont égales à ces deux $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{2}$; par conséquent le produit des deux premieres qui est $\frac{12}{48}$ est égal au produit des deux dernieres, qui est $\frac{1}{4}$: d'ailleurs il est clair que 1 & 4 sont premiers entr'eux; par conséquent 1 & 4 sont les exposans de la raison doublée $\frac{12}{48}$. Or ces deux nombres 1 & 4 sont des quarrez, puisque le premier est le produit des deux antécedens égaux 1 & 1, & le second est le produit des deux conséquens égaux 2 & 2; donc la raison doublée $\frac{12}{48}$ a pour exposans des nombres quarrez.

Afin de démontrer cette proposition sur les raisons doublées d'une maniere générale, il faudroit prouver que lorsque deux nombres sont premiers entr'eux, leurs quarrez sont aussi premiers entr'eux; par exemple, que 1 & 2 étant premiers entr'eux, il s'ensuit que les quarrez 1 & 4 le sont aussi : mais comme cela demande une suite de plusieurs démonstrations assez difficiles, nous ne pouvons les déduire dans cet abregé.

COROLLAIRE.

127. Il suit de-là qu'une raison doublée qui n'a pas pour exposans des nombres quarrez, n'est pas raison doublée de raisons de nombre à nombre; c'est-à-dire, que les raisons dont elle est doublée ne sont pas de nombre à nombre : car la raison doublée auroit pour exposans des nombres quarrez, si les raisons dont elle est doublée, étoient de nombre à nombre, comme on vient de le faire voir.

128. Il faut donc bien prendre garde que la raison doublée qui n'a pas pour exposans des nombres quarrez, peut être de nombre à nombre : mais celles dont elle est doublée ne peuvent être de nombre à nombre : supposez que la raison $\frac{ac}{b}$ soit une raison doublée qui n'ait pas pour exposans des nombres quarrez, les raisons composantes $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ ne sont pas de nombre à nom-

bre ; mais la raison $\frac{ac}{bd}$ peut être de nombre à nombre : par exemple, ac peut être à bd, comme 1 est à 2 : ces deux nombres 1 & 2 ne sont pas tous les deux quarrez ; il n'y a que 1 qui soit quarré : mais 2 n'est pas un quarré.

Nous allons placer ici une remarque sur les racines incommensurables, que nous n'avons pû mettre dans le traité de l'Extraction des Racines, parce que la preuve dépend des Proportions.

REMARQUES.

129. Quoique les racines des nombres qui ne sont pas des puissances parfaites, soient incommensurables par rapport à l'unité & aux nombres entiers ou fractionnaires formez de l'unité, elles peuvent être commensurables entre elles : par exemple : $5\sqrt{2}$ & $3\sqrt{2}$ qui sont les racines quarrées de 50 & de 18 *, sont commensurables entre elles ; c'est-à-dire, qu'elles sont comme nombre à nombre : car les deux racines $5\sqrt{2}$ & $3\sqrt{2}$ sont les produits des nombres 5 & 3 multipliez par la même grandeur $\sqrt{2}$; donc elles sont entre elles comme 5 à 3 * : elles sont donc comme nombre à nombre, ou ce qui revient au même, elles sont commensurables entre elles.

*Liv. 1. art. 223

* 18.

Après avoir parlé assez au long des raisons & des proportions géométriques, il est à propos de démontrer la principale proprieté de la proportion arithmétique, dont nous allons faire le Théorême suivant.

THÉOREME FONDAMENTAL.
De la proportion arithmétique.

130. *Dans une proportion arithmétique la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens.*

Soit la proportion arithmétique 5. 8 : 9. 12. je dis que la somme des extrêmes $5+12$ est égale à la somme des moyens $8+9$.

DEMONSTRATION.

Considerez que si le premier extrême 5 est surpassé de 3 par le premier moyen 8, aussi le second extrême 12 surpasse nécessairement le second moyen 9 de la même quantité 3; autrement il n'y auroit pas de proportion arithmétique; donc le défaut du premier extrême est compensé par l'excès du second; c'est pourquoi la somme des extrêmes $5+12$ doit être égale à la somme des moyens $8+9$.

Il est évident que le même raisonnement peut être appliqué à tout autre exemple de proportion arithmétique dont les conséquens surpasseroient également les antécedens. Ce seroit aussi la même chose, si les antécedens surpassoient également les conséquens; car pour lors l'excès du premier extrême compenseroit le défaut de l'autre.

AUTRE DEMONSTRATION.

Si $a \,.\, b : c \,.\, d$, je dis que $a+d=b+c$: car soit supposé b plus grand que l'antécedent a de la quantité x; il faudra que d soit aussi plus grand que son antécedent c de la quantité x; autrement il n'y auroit pas de proportion arithmétique entre les quatre grandeurs a, b, c, d. Cela étant, b est égal à $a+x$; puisque b contient a, & de plus x qui est l'excès de b sur a: par la même raison $d=c+x$; ainsi dans la proportion $a \,.\, b : c \,.\, d$, on peut mettre $a+x$ à la place de b, & $c+x$ à la place de d, ce qui donnera $a \,.\, a+x : c \,.\, c+x$. Or il est évident que dans cette proportion la somme des extrêmes $a+c+x$, est égale à la somme des moyens $a+x+c$; puisque ce sont les mêmes grandeurs qui composent la somme des extrêmes & celle des moyens; donc &c.

Si les antécedens avoient été plus grands que les conséquens, en sorte que a eût été égal à $b+x$, & c égal à $d+x$ on auroit démontré la même chose en substituant $b+x$ à la place de a, & $d+x$ à celle de c.

COROLLAIRE.

131. Dans une proportion continuë arithmétique, la somme des extrêmes est égale au double du moyen proportionnel : par exemple, si on a la proportion continuë arithmétique $5 . 8 : 8 . 11$, la somme des extrêmes $5+11$ ou 16 égale $8+8$ ou 16 double du moyen proportionnel 8. C'est une suite manifeste du Théorême ; parce que le double du moyen proportionnel est la somme des moyens, laquelle par conséquent doit être égale à la somme des extrêmes.

132. La proportion inverse de ce Theorême fondamental est encore vraye, c'est-à-dire, que si la somme des extrêmes est égale à celle des moyens, les quatre grandeurs sont en proportion arithmétique. Par exemple, si $a+d=b+c$, il faut que $a . b : c . d$: car la somme $a+d$ étant égale à cette autre $b+c$, il est clair que si b surpasse a de la quantité x, il faudra aussi que d surpasse c de la même quantité; autrement $a+d$ ne seroit pas égal à $b+c$. Ainsi on aura la proportion $a . b : c . d$; puisque chacun des conséquens b & d surpasse son antécedent de la même quantité.

133. Il suit de-là qu'on peut faire les changemens appellez *alternando* & *invertendo* dans une proportion arithmétique sans la détruire. Mais nous ne nous arrêterons pas davantage à parler de cette espece de proportion, il est tems de passer aux fractions.

DES FRACTIONS.

134. Lorſqu'on conçoit qu'un tout eſt diviſé en parties aliquotes ou égales, & qu'on prend un certain nombre de ces parties, cela s'appelle *fraction*: on peut donc dire qu'une fraction n'eſt autre choſe qu'une ou pluſieurs parties aliquotes d'un tout. La fraction s'exprime par deux nombres, dont l'un marque en combien de parties égales le tout eſt diviſé, & on l'appelle *dénominateur*, & l'autre montre combien on prend de ces parties, & on le nomme *numerateur*; on écrit le dénominateur au deſſous du numerateur en les ſéparant par une petite ligne, en cette ſorte, $\frac{3}{5}$: on énonce cette fraction, en diſant, trois cinquiémes; 3 eſt le numérateur, parce qu'il déſigne combien on prend de parties, c'eſt-à-dire, de cinquiémes, & 5 eſt le dénominateur, parce qu'il marque que le tout eſt diviſé en cinq parties égales.

135. Si la fraction eſt exprimée par des lettres, comme $\frac{a}{b}$, elle marque que le tout eſt partagé en un nombre de parties qui eſt indéterminé & déſigné par le dénominateur b, & qu'on prend auſſi un nombre indéterminé de ces parties qui eſt marqué par le numérateur a.

136. Le numérateur d'une fraction peut être égal, ou plus petit, ou plus grand que ſon dénominateur: lorſque le numérateur eſt égal au dénominateur, la fraction eſt égale au tout que l'on regarde comme l'unité: par exemple, $\frac{4}{4}=1$. La raiſon en eſt qu'un tout eſt égal à toutes ſes parties priſes enſemble; ainſi quatre quatriémes marquez par la fraction $\frac{4}{4}$ valent le tout: ſi le numérateur eſt plus petit que le dénominateur, la fraction vaut moins que l'unité: telle eſt la fraction $\frac{3}{4}$. Enfin quand le numérateur eſt plus grand que le dé-

nominateur, la fraction est plus grande que l'unité, comme $\frac{5}{4}$.

137. Si on a deux fractions dont les numérateurs different également des dénominateurs, celle qui est exprimée par de plus grands nombres est la plus grande. Ainsi de ces deux fractions $\frac{14}{15}$ & $\frac{9}{10}$ dont les numérateurs different de leurs dénominateurs seulement par l'unité, la premiere est plus grande que la seconde. Car la premiere est plus petite que le tout seulement d'un quinziéme, puisque la fraction $\frac{15}{15}$ est égale au tout: au lieu que la seconde est moindre que le tout d'un dixiéme. Or il est évident qu'un quinziéme est plus petit qu'un dixiéme. Donc la premiere differe moins du tout que la seconde. Ainsi elle est plus grande que cette seconde.

138. Puisqu'une fraction est égale à 1 quand le numérateur & le dénominateur sont égaux; il suit qu'elle est égale à 2, si le numérateur est double du denominateur; qu'elle vaut 3, si le numérateur est triple du dénominateur; qu'elle vaut 4, s'il est quadruple, &c. par exemple, la fraction $\frac{4}{4}$ étant égale à 1; on a aussi $\frac{8}{4}=2, \frac{12}{4}=3, \frac{16}{4}=4, \frac{20}{4}=5$, &c. c'est-à-dire, que si quatre quatriémes valent 1, huit quatriémes valent 2, douze quatriémes valent 3, &c: ce qui est évident, puisque huit quatriémes sont le double de 4 quatriémes, & que douze quatriémes en sont le triple, &c. En général la valeur d'une fraction dépend du nombre de fois que le numérateur contient le dénominateur; en sorte qu'une fraction est toûjours égale au quotient du numérateur divisé par le dénominateur, par exemple la fraction $\frac{20}{4}$ est égale à 5, parce que le quotient de 20 divisé par 4 est 5. Or nous avons vû que la valeur d'une raison étoit aussi égale au quotient de l'antécedent divisé par le conséquent; * ainsi pour me servir du même exemple, la raison de 20 à 4 est égale à 5; c'est pourquoi la fraction $\frac{20}{4}$ est la même chose que la rai-

* 25.

ſon de 20 à 4 : & en général une fraction eſt la même choſe que le rapport ou la raiſon du numérateur au dénominateur : c'eſt une ſeconde notion que l'on peut donner de la fraction.

139. Lorſque le numérateur eſt moindre que le dénominateur, quoique l'on ne puiſſe faire alors la diviſion du premier par le ſecond, la fraction eſt cependant une diviſion indiquée : ainſi la fraction $\frac{3}{5}$ marque que 3 eſt diviſé par 5, c'eſt-à-dire, que l'on prend ſeulement la cinquiéme partie de 3 ; je dis la cinquiéme partie, parce que le dénominateur eſt 5 ; de là il ſuit que cette expreſſion *trois cinquiémes*, & celle-ci *la cinquiéme partie de trois* ſignifient la même choſe, puiſque la fraction $\frac{3}{5}$ peut être énoncée de l'une & l'autre maniere. Il en eſt de même des autres fractions ; celle-ci, par exemple $\frac{12}{4}$, peut être énoncée en diſant, douze quatriémes, ou la quatriéme partie de douze ; la premiere expreſſion eſt la plus ordinaire, & répond directement à la premiere notion qu'on a donnée des fractions.

140. Pour mieux concevoir que trois cinquiémes & la cinquiéme partie de trois, ſont la même choſe ; appliquons ces deux expreſſions à un exemple particulier : je dis donc que trois cinquiémes d'un écu, & la cinquiéme partie de trois écus ſont la même valeur. Car ſi la premiere expreſſion marque trois cinquiémes, quoique la ſeconde exprime ſeulement un cinquiéme ; auſſi en récompenſe cette ſeconde expreſſion ſignifie que l'on prend la cinquiéme partie de trois écus, au lieu que la premiere marque que l'on ne prend que trois cinquiémes d'un ſeul écu ; ce qui, comme on voit, revient à la même choſe.

141. On voit par là que la quantité $\frac{3}{5}a$ ou $\frac{3}{5} \times a$ eſt égale à $\frac{3a}{5}$, puiſque la premiere eſt trois cinquiémes de la grandeur a, & la ſeconde eſt la cinquiéme partie de trois a. De même $\frac{4}{7}c = \frac{4c}{7}$.

142. Il suit de ce qu'on a dit jusqu'ici qu'une fraction est d'autant plus grande que le numérateur est grand par rapport au dénominateur : par exemple la fraction $\frac{12}{4}$ est plus grande que $\frac{8}{4}$: au contraire une fraction est d'autant plus petite que le dénominateur est grand par rapport au numérateur : par exemple, $\frac{5}{6}$ est moindre que $\frac{5}{3}$.

143. Il faut observer qu'une fraction peut changer de termes sans changer de valeur. Exemples. $\frac{5}{10}=\frac{3}{6}$, parce qu'il y a même raison de 5 à 10 que de 3 à 6. De même $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$. En un mot, quand le rapport qui est entre les deux termes d'une fraction est égal au rapport qui est entre les deux termes d'une autre fraction, les valeurs de ces deux fractions sont égales.

On fait sur les fractions les mêmes opérations que sur les entiers, & on en fait aussi de particuliéres dont les principales consistent à les réduire à de plus petits termes, à les réduire au même dénominateur, à réduire les entiers en fractions, & les fractions en entiers ; enfin à évaluer les fractions. Nous allons donner la méthode de faire toutes ces opérations tant communes que particuliéres, en commençant par celles-ci : & quoique les regles que nous donnerons conviennent également aux fractions numériques, & aux fractions algébriques, c'est-à-dire, qui sont exprimées par lettres ; cependant nous parlerons presque toûjours des fractions en nombres que nous nous proposons principalement, & nous donnerons seulement des exemples des fractions en lettres, pour faire voir que la regle peut y être appliquée.

Réduire les Fractions à de moindres termes.

144. Pour réduire une fraction à de moindres termes, il faut diviser le numérateur & le dénominateur par le même diviseur, & les deux quotiens feront une

fraction de même valeur que la proposée, quoique les termes en soient plus petits. Exemple. La fraction $\frac{12}{15}$ peut se réduire à de plus petits termes, eu divisant le numérateur & le dénominateur par 3, & on aura $\frac{4}{5}=\frac{12}{15}$: de même si on divise par 5 les termes de la fraction $\frac{5}{20}$, il viendra $\frac{1}{4}=\frac{5}{20}$.

Pour réduire la fraction algébrique $\frac{ad}{bd}$ à de moindres termes, il faut diviser le numérateur & le dénominateur par le diviseur commun d, & on aura $\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}$.

145. La maniere la plus facile de réduire les fractions numériques à de plus petits termes, est de prendre la moitié du numérateur & celle du dénominateur. Exemple. $\frac{40}{60}=\frac{20}{30}=\frac{10}{15}$. Autre exemple. $\frac{64}{80}=\frac{32}{40}=\frac{16}{20}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$. En prenant la moitié du numérateur & celle du dénominateur, on fait la même chose que si on divisoit l'un & l'autre par 2.

Il est clair qu'on ne peut se servir de cette méthode que quand les deux termes de la fraction sont chacun des nombres pairs. C'est pour cela que dans le premier exemple on en est resté à la fraction $\frac{10}{15}$; quoiqu'on puisse encore la réduire à de moindres termes, en faisant la division par 5 ; ce qui donnera $\frac{2}{3}=\frac{10}{15}$.

La méthode de réduire une fraction à de moindres termes en divisant le numérateur & le dénominateur par un diviseur commun, est fondée sur le huitiéme
* 19. Principe * touchant les raisons, dans lequel on a fait voir que si on divise deux grandeurs par une troisiéme, la raison des quotiens est égale à celle des grandeurs avant la division : ce principe doit s'appliquer aux fractions, puisque ce sont de véritables raisons.

REMARQUES.

REMARQUES.

I.

146. Plus le diviseur est grand, plus les termes ausquels la fraction est réduite sont petits : par exemple, si on divise les deux termes de la fraction $\frac{24}{30}$ par 6, on aura la fraction $\frac{4}{5}$ dont les termes sont plus petits, que si on avoit divisé le numérateur & le dénominateur de la même fraction $\frac{24}{30}$ par 2 : ce qui auroit donné $\frac{12}{15}$. Cela vient de ce que plus le diviseur est grand, plus le quotient est petit, quand c'est le même nombre qu'on divise par un grand & un petit diviseur.

II.

147. Quand un des termes est l'unité, il est impossible de réduire la fraction à de plus petits termes : par exemple, $\frac{1}{5}$ ne peut se réduire à de moindres termes. De même quand le numérateur n'est surpassé que d'une unité par le dénominateur, on ne peut aussi réduire la fraction à de moindres termes : par exemple, la fraction $\frac{14}{15}$ ne peut être réduite.

Réduire les Fractions au même dénominateur.

148. Pour réduire deux fractions, comme $\frac{5}{6}$ & $\frac{2}{3}$ au même dénominateur, sans en changer la valeur, il faut multiplier les deux termes de la premiere par 3 dénominateur de la seconde, il vient $\frac{15}{18}$; & multiplier pareillement les deux termes de la seconde par 6 dénominateur de la premiere : ce qui donne aussi $\frac{12}{18}$, les deux fractions réduites sont donc $\frac{15}{18}$ & $\frac{12}{18}$ qui sont de même valeur que les deux premieres $\frac{5}{6}$ & $\frac{2}{3}$, & qui ont nécessairement le même dénominateur 18.

Il y a deux choſes à démontrer ſur cette regle, la premiere eſt qu'en ſuivant la méthode preſcrite, les deux fractions réduites ſont de même valeur que les propoſées ; & la ſeconde, que les deux fractions réduites ont un même dénominateur : c'eſt ce que nous allons faire voir.

1°. Les deux fractions réduites ſont de même valeur que les deux premieres : car ſi on multiplie deux grandeurs par une troiſiéme, la raiſon des produits eſt
* 18. égale à celle des racines *. Or en ſuivant la méthode preſcrite, les deux termes de la premiere fraction ſont multipliez par un même nombre, ſçavoir par le dénominateur de la ſeconde : & de même les deux termes de la ſeconde ſont multipliez par le dénominateur de la premiere ; ainſi les deux nouvelles fractions ſont égales aux deux premieres.

2°. Les deux fractions réduites ont le même dénominateur, puiſqu'en ſuivant la méthode, le dénominateur de la premiere fraction réduite, eſt le produit de 6 par 3, & le dénominateur de la ſeconde eſt le produit de 3 par 6, leſquels produits ſont néceſſairement égaux.

149. S'il y avoit trois fractions à réduire au même dénominateur, il faudroit multiplier le numérateur & le dénominateur de chacune par le produit des dénominateurs des deux autres. Soient les trois fractions $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, à réduire au même dénominateur : on trouvera, en ſuivant la regle, les trois réduites $\frac{75}{90}$, $\frac{60}{90}$, $\frac{72}{90}$.

On ſuit la même méthode pour les fractions litterales : exemple. Les fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ ſe réduiſent à celles-ci $\frac{ad}{bd}$, $\frac{bc}{bd}$.

150. En réduiſant deux fractions au même dénominateur, on peut voir quelle eſt la plus grande, on peut même connoître quel eſt le rapport exact de

l'une à l'autre : car elles sont entre elles comme les numérateurs des fractions réduites. Si on a, par exemple, les deux fractions $\frac{4}{5}$ & $\frac{3}{7}$ dont on cherche le rapport, il faut les réduire au même dénominateur, & on aura les deux nouvelles fractions $\frac{28}{35}$ & $\frac{15}{35}$ qui sont égales aux premieres. Or ces deux dernieres fractions sont entre elles comme les numérateurs 28 & 15 : car les deux fractions sont les quotiens des numérateurs divisez par le dénominateur *. Et d'ailleurs le dénominateur étant ici le même, les quotiens sont entre eux comme les dividendes, c'est-à-dire, comme les numérateurs. * * 138. * 10.

151. Mais lorsque deux fractions ont un même numérateur, elles sont entre elles réciproquement comme les dénominateurs : par exemple $\frac{4}{5}$ est à $\frac{4}{7}$ comme 7 est à 5. Pour le démontrer d'une maniere générale je prends les deux fractions $\frac{a}{b}$ & $\frac{a}{c}$, & je prouve ainsi que $\frac{a}{b}.\frac{a}{c}::c.b$: si on réduit les deux fractions au même denominateur, on aura $\frac{ac}{bc}$ & $\frac{ab}{bc}$, qui sont par conséquent entre elles comme les numérateurs *ac* & *ab*. Or la raison de ces deux numérateurs est égale à celle de *c* à *b*, puisque *ac* & *ab* sont les produits des grandeurs *c* & *b* multipliées par la même quantité *a* : par conséquent les deux fractions $\frac{ac}{bc}$ & $\frac{ab}{bc}$, ou leurs équivalentes $\frac{a}{b}$ & $\frac{a}{c}$ sont entre elles comme *c* & *b* : c'est-à-dire, que ces deux dernieres fractions sont réciproquement comme leurs dénominateurs.

Réduire un nombre entier en Fraction.

152. Pour réduire un nombre entier en fraction de même valeur que l'entier, il faut écrire l'unité au-dessous du nombre pour servir de dénominateur : par exemple, 5 est égal à $\frac{5}{1}$; car une fraction est égale au

quotient du numerateur divisé par le dénominateur : or le quotient de 5 divisé par 1 est égal à 5, puisque 1 est contenu cinq fois dans 5.

153. Si on vouloit avoir un autre dénominateur que l'unité, il faudroit multiplier le nombre proposé par le dénominateur ; & le produit seroit le numérateur de la fraction cherchée : par exemple, pour réduire 5 en une fraction qui ait 3 pour dénominateur, je multiplie 5 par 3 ; & le produit 15 est le numérateur de la fraction $\frac{15}{3}$ qui est égale à 5, puisque le numérateur qui est le produit de 5 par 3, ou, ce qui est la même chose, de 3 par 5, contient cinq fois le dénominateur 3.

C'est la même chose pour les quantitez algébriques : par exemple, $a = \frac{a}{1}$: & si on veut avoir un autre dénominateur que l'unité, comme b, on trouvera $a = \frac{ab}{b}$.

Réduire une Fraction en entier.

154. Pour réduire une fraction en entier (ce qui ne se peut que quand le numérateur est égal ou plus grand que le dénominateur,) il faut diviser le numérateur par le dénominateur ; & le quotient exprimera la valeur de la fraction : par exemple, si on veut réduire en entier la fraction $\frac{15}{3}$, on divise 15 par 3, & le quotient 5 marque la valeur de la fraction proposée.

155. Si la division ne pouvoit se faire exactement, comme dans la fraction $\frac{17}{3}$, la valeur de cette fraction seroit l'entier 5 que l'on trouveroit au quotient, plus le reste du numérateur, c'est-à-dire, 2 à qui il faudroit toûjours donner le même dénominateur 3. ; ainsi $\frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3}$. Cela s'entend facilement après ce que nous avons dit sur-tout en parlant de la réduction des entiers en fractions.

On fait de même pour les fractions littérales : par exemple, $\frac{ab}{b}=a$. De même $\frac{abd}{ad}=b$. Mais il est facile de voir que cette réduction n'a lieu que quand les lettres du dénominateur sont toutes communes au numérateur ; ainsi la fraction $\frac{ad}{b}$ ne peut se réduire en entier.

Evaluer une Fraction.

156. Evaluer une fraction, c'est la réduire en parties connuës d'un tout : si on a, par exemple, la fraction $\frac{2}{3}$ d'un pied, & qu'on la réduise en pouces, c'est évaluer la fraction $\frac{2}{3}$ d'un pied.

157. Pour faire cette évaluation ; il faut diviser le nombre qui marque combien le tout contient de parties, par le dénominateur de la fraction ; & après cela multiplier le quotient par le numerateur : ainsi dans l'exemple proposé, le pied contenant 12 pouces, je divise 12 par le dénominateur 3 ; & je multiplie ensuite le quotient 4 par le numérateur 2 ; le produit 8 fait voir que $\frac{2}{3}$ d'un pied vaut 8 pouces.

Voici la démonstration de cette méthode appliquée à notre exemple : puisque le pied contient 12 pouces, il s'ensuit que $\frac{2}{3}$ d'un pied vaut les deux tiers de 12 pouces ; & par conséquent pour évaluer cette fraction, il faut prendre les deux tiers de 12 pouces. Or pour prendre les deux tiers de 12, il n'y a qu'à en prendre d'abord le tiers, & le multiplier ensuite par 2 ; c'est-à-dire, qu'il faut diviser 12 par 3, & multiplier le quotient par 2.

158. Au lieu de diviser 12 par 3, & de multiplier ensuite le quotient par 2, on pourroit commencer par la multiplication, & faire ensuite la division, en gardant toûjours le même diviseur & le même multiplicateur ; c'est-à-dire, qu'on pourroit d'abord multiplier 12 par 2, & diviser ensuite le produit par 3 ; &

on trouveroit la même valeur de la fraction : car en divisant 12 par 3, & multipliant ensuite le quotient par 2, il est visible que le résultat de l'opération est double du quotient de 12 divisé par 3. Or pareillement en multipliant d'abord 12 par 2, & divisant ensuite le produit par 3, on trouve un quotient double de celui de 12 divisé par 3, puisque le produit que l'on divise est double de 12. Donc le résultat de l'opération est le même dans les deux cas. On peut toûjours faire le même raisonnement sur tout autre exemple. Donc il est indifférent de commencer par la multiplication ou par la division.

159. Il suit de là que pour évaluer une fraction, on peut d'abord multiplier le nombre qui marque combien le tout contient de parties par le numérateur de la fraction, & ensuite diviser le produit par le dénominateur de la fraction : par exemple, supposé qu'un écu vaille 60 sols, & que je veuille évaluer la fraction $\frac{4}{5}$ d'un écu ; je multiplie d'abord 60 par le numérateur 4, parce que l'écu vaut 60 sols : après cela je divise le produit 240 par le dénominateur 5, & je trouve au quotient 48 : ce qui marque que la fraction $\frac{4}{5}$ d'un écu vaut 48 sols.

160. Remarquez qu'il arrive assez souvent qu'on ne peut faire la division sans reste, comme dans l'exemple suivant : soit la fraction $\frac{8}{9}$ d'une toise qu'on propose d'évaluer en pieds. Suivant la seconde méthode, il faut multiplier 6 par le numerateur 8, parce que la toise contient six pieds, & diviser ensuite le produit 48 par le dénominateur 9 : on trouvera au quotient 5, & la fraction $\frac{3}{9}$; par conséquent $\frac{8}{9}$ de toise vaut 5 pieds & $\frac{3}{9}$ d'un pied.

Cette derniere fraction $\frac{3}{9}$ de pied peut encore être évaluée en pouces par la même méthode ; c'est-à-dire, qu'il faut multiplier 12 par le numérateur 3, parce que

le pied contient 12 pouces, & diviser le produit 36 par 9; le quotient sera 4; ainsi la fraction $\frac{3}{9}$ de pied vaut 4 pouces; par conséquent la premiere fraction $\frac{8}{9}$ de toise vaut 5 pieds 4 pouces.

Voici encore un autre exemple : supposant l'écu de 60 sols, on demande combien vaut la fraction $\frac{4}{7}$ d'un écu. Je réduis d'abord en sols la fraction proposée, en multipliant 60 par 4; & divisant ensuite le produit 240 par 7 : ce qui me donne pour quotient 34 sols & $\frac{2}{7}$ d'un sol; je réduis pareillement en deniers la fraction $\frac{2}{7}$ d'un sol, & je trouve qu'après avoir multiplié 12 par 2, & divisé le produit 24 par 7 le quotient est 3 plus $\frac{3}{7}$; ainsi la fraction $\frac{2}{7}$ d'un sol vaut 3 deniers & $\frac{3}{7}$ d'un denier; par conséquent la fraction $\frac{4}{7}$ d'un écu, vaut 34 sols 3 deniers & $\frac{3}{7}$ d'un denier : on peut négliger $\frac{3}{7}$ d'un denier.

Nous allons parler présentement des opérations communes aux fractions & aux entiers : ces opérations sont l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, la formation des puissances & l'extraction des racines.

DE L'ADDITION DES FRACTIONS.

161. Pour ajoûter deux ou plusieurs fractions, il faut d'abord les réduire au même dénominateur, si elles en ont de différens; & ensuite ajoûter ensemble les numérateurs, en laissant le dénominateur commun; & on a la somme des fractions. Exemple. Je veux ajoûter les deux fractions $\frac{2}{5}$ & $\frac{3}{4}$: pour cela je les réduis d'abord au même dénominateur; ce qui donne $\frac{8}{20}$ & $\frac{15}{20}$; après quoi j'ajoûte les numérateurs sans rien changer au dénominateur, & la somme est $\frac{23}{20}$; c'est-à-dire, vingt-trois vingtiémes.

La raison de cette pratique est évidente; car l'on voit aisément que huit vingtiémes & quinze vingtiémes font vingt-trois vingtiémes; il suffit donc, quand les fractions ont même dénominateur, d'ajoûter les numérateurs, en laissant le dénominateur commun.

On opére de même sur les fractions algébriques: soient par exemple, les deux fractions $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, qu'il faut ajoûter; je les réduis au même dénominateur : ce qui produit $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$; après quoi j'ajoûte seulement les numérateurs en laissant le dénominateur commun, la somme est $\frac{ad+bc}{bd}$.

162. Si on propose un entier & une fraction à ajoûter avec un entier & une fraction, il faut ajoûter l'entier avec l'entier, & la fraction avec la fraction : par exemple pour ajoûter $12+\frac{2}{5}$ avec $15+\frac{4}{7}$, je prends la somme des entiers qui est 27; ensuite j'ajoûte les fractions, après les avoir réduites au même dénominateur; ainsi la somme des entiers & des fractions est $27+\frac{34}{35}$.

DE LA SOUSTRACTION DES FRACTIONS.

163. Pour soustraire une fraction d'une autre, il faut les réduire au même dénominateur, quand elles en ont qui sont différens, & ôter ensuite le numérateur de celle qu'on veut soustraire du numerateur de l'autre, en laissant le dénominateur commun. Exemple. Pour soustraire $\frac{2}{5}$ de $\frac{3}{5}$, j'ôte le numérateur 2 de 3; & je laisse le même dénominateur 5; il reste $\frac{1}{5}$. Si ces fractions n'avoient pas eu le même dénominateur, il auroit fallu les y réduire avant que de faire la soustraction.

La raison de cette opération s'entend assez, c'est la même que celle de l'addition.

Quand les fractions sont littérales, on opere de la même maniere. Exemple. De la fraction $\frac{a}{b}$ on veut souf-

traire celle-ci $\frac{c}{d}$: il faut réduire l'une & l'autre à celles-ci $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$, qui sont égales aux premieres & qui ont même dénominateur ; & ôter ensuite le numérateur de la seconde des réduites, du numérateur de la premiere ; on aura $\frac{ab-bc}{bd}$ qui est le reste ou la différence des deux fractions.

164. Si on propose un entier & une fraction à soustraire d'un entier & d'une fraction, il faut ôter l'entier de l'entier, & la fraction de la fraction : par exemple pour soustraire $9+\frac{2}{5}$ de $12+\frac{3}{4}$, j'ôte 9 de 12, & après avoir réduit les deux fractions $\frac{2}{5}$ & $\frac{3}{4}$ au même dénominateur, j'ôte encore la premiere de la seconde, & je trouve que le reste des entiers & des fractions est $3+\frac{7}{20}$. Si la fraction du nombre à soustraire avoit été plus grande que celle de l'autre nombre, il auroit fallu commencer par réduire une unité de 12 en une fraction qui auroit eu le même dénominateur que $\frac{3}{4}$, & l'ajoûter avec $\frac{3}{4}$; ensuite opérer, comme on vient de le dire.

DE LA MULTIPLICATION DES FRACTIONS.

On peut multiplier une fraction par un nombre entier ou par une autre fraction. Nous allons donner la méthode pour l'un & l'autre cas.

165. 1°. Pour multiplier une fraction par un entier, il faut multiplier seulement le numérateur de la fraction par l'entier, & laisser le même dénominateur. Exemple. Je veux multiplier $\frac{3}{5}$ par 4 : pour cela je multiplie le numérateur 3 par 4 ; & gardant le même dénominateur, j'aurai la fraction $\frac{12}{5}$ qui est le produit de $\frac{3}{5}$ par 4.

La raison est que quand on veut multiplier $\frac{3}{5}$ par 4, on cherche une fraction quatre fois plus grande que $\frac{3}{5}$. * Or en multipliant seulement le numérateur par 4, *Liv. I. Art. 36.

la fraction qui vient de cette multiplication est quatre fois plus grande que $\frac{3}{5}$: car une fraction est d'autant plus grande que son numérateur est plus grand par
* 142. rapport au dénominateur. * Or en multipliant le numérateur 3 par 4, le produit 12 est quatre fois plus grand que 3; par conséquent la fraction $\frac{12}{5}$ est quatre fois plus grande que $\frac{3}{5}$; donc $\frac{12}{5}$ est le véritable produit de $\frac{3}{5}$ par 4. Ce qu'il falloit démontrer.

166. 2°. Pour multiplier deux fractions l'une par l'autre, il faut non-seulement multiplier les deux numérateurs, mais aussi les deux dénominateurs l'un par l'autre. Exemple. On veut multiplier les deux fractions $\frac{3}{5}$ & $\frac{4}{6}$ l'une par l'autre, il faut multiplier 3 par 4, & 5 par 6; & on aura $\frac{12}{30}$ produit des deux fractions proposées.

Afin de concevoir la raison de cette regle, il faut faire attention que pour multiplier $\frac{3}{5}$ par 4, on doit multiplier seulement le numérateur 3 par 4, & on aura la fraction $\frac{12}{5}$ qui est le véritable produit, comme nous venons de le démontrer. Or le produit de $\frac{3}{5}$ par $\frac{4}{6}$ doit être six fois plus petit que $\frac{12}{5}$ puisque le multiplicateur $\frac{4}{6}$, c'est-à-dire, 4 divisé par 6, est six fois plus petit que le multiplicateur 4; il faut donc rendre la fraction $\frac{12}{5}$ six fois plus petite. Or pour rendre une fraction plus petite, il n'y a qu'à augmenter le dénomina-
142. teur en laissant le même numérateur *; par conséquent pour rendre la fraction $\frac{12}{5}$ six fois plus petite, il n'y a qu'à rendre son dénominateur six fois plus grand; c'est-à-dire, le multiplier par 6; donc pour multiplier une fraction par une autre, il faut non-seulement multiplier le numérateur par le numérateur; mais aussi le dénominateur par le dénominateur.

On auroit pû prouver aussi cette méthode par l'article 85 : car les fractions n'étant que des raisons on

doit multiplier deux fractions de la même maniere que deux raisons. Or pour avoir le produit de deux raisons, il faut multiplier l'antécedent de l'une par l'antécedent de l'autre, & le conséquent par le conséquent. On doit donc aussi quand il s'agit de la multiplication de deux fractions, multiplier le numérateur par le numérateur, & le dénominateur par le dénominateur.

On observe la même méthode pour la multiplication des fractions littérales. 1°. Le produit de $\frac{a}{b}$ par c est $\frac{ac}{b}$. 2°. Le produit de $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$ est $\frac{ac}{bd}$.

167. Si on vouloit multiplier un entier & une fraction par un entier & une fraction, il faudroit réduire le multiplicande à une seule fraction, & le multiplicateur aussi à une autre fraction ; & ensuite multiplier ces deux nouvelles fractions l'une par l'autre : par exemple, pour multiplier $8+\frac{3}{4}$ par $7+\frac{2}{5}$, il faut réduire premierement le multiplicande $8+\frac{3}{4}$ en une fraction : pour cela je réduis d'abord 8 à une fraction qui ait un même dénominateur que $\frac{3}{4}$: & je trouve $\frac{32}{4}=8$: ensuite j'ajoûte $\frac{3}{4}$ avec $\frac{32}{4}$, la somme $\frac{35}{4}$ est le multiplicande total. En second lieu je réduis de la même maniere le multiplicateur à la seule fraction $\frac{37}{5}$. Enfin je multiplie $\frac{35}{4}$ par $\frac{37}{5}$ le produit est $\frac{1295}{20}$ que l'on peut réduire en entier.

Nous n'avons pas parlé de la multiplication des entiers par des fractions, parce qu'il est évident que ce cas se rapporte au premier dans lequel il s'agit de la multiplication des fractions par des entiers : par exemple on doit avoir le même produit, soit qu'on multiplie 4 par $\frac{3}{5}$ ou bien $\frac{3}{5}$ par 4.

REMARQUES.

I.

168. Nous avons vû que pour ajoûter & soustraire

les fractions, il faloit les réduire au même dénominateur : mais cette préparation n'est pas nécessaire pour la multiplication non plus que pour la division des fractions.

II.

169. Quand dans la multiplication des fractions le multiplicateur est plus petit que l'unité, le produit est aussi moindre que le multiplicande : par exemple, $\frac{1}{3}$ multiplié par $\frac{2}{4}$ donne au produit la fraction $\frac{2}{12}$ qui est moindre que $\frac{1}{3}$: car la fraction $\frac{2}{12}$ ne vaut pas un $\frac{1}{3}$, c'est-à-dire, un tiers ; il faudroit qu'il y eût $\frac{4}{12}$ & non pas $\frac{2}{12}$.

La raison pourquoi le produit est alors plus petit que le multiplicande, c'est que plus le multiplicateur est petit, plus aussi le produit est petit. Or si on multiplie par l'unité, le produit est égal au multiplicande ; donc si on multiplie par un multiplicateur plus petit que l'unité, le produit doit être moindre que le multiplicande.

Cela se peut aussi prouver par la proportion qui se trouve dans toute multiplication : voici cette proportion ; le produit est au multiplicande, comme le mul-
* 69. tiplicateur est à l'unité * ; par conséquent, si le multiplicateur est plus petit que l'unité, il faut que le produit soit moindre que le multiplicande.

170. C'est par la multiplication que l'on réduit les fractions de fractions à une fraction simple. Je suppose qu'on ait la fraction de fraction $\frac{3}{5}$ de $\frac{4}{6}$, c'est-à-dire, trois cinquiémes de quatre sixiémes : pour entendre ce qu'elle exprime il faut l'appliquer à un cas particulier en cherchant, par exemple, ce que valent trois cinquiémes de quatre sixiémes d'un écu de trois livres. Premierement quatre sixiémes d'un écu de trois livres sont 40 sols. En second lieu trois cinquiémes de 40 sols sont 24 sols. Ainsi trois cinquiémes de quatre sixiémes

d'un écu valent 24 sols. Il s'agit donc de réduire $\frac{3}{5}$ de $\frac{4}{6}$ à une fraction simple : or pour cela il faut multiplier $\frac{4}{6}$ par $\frac{3}{5}$, & le produit $\frac{12}{30}$ est la fraction simple qui exprime la valeur de la fraction de fraction $\frac{3}{5}$ de $\frac{4}{6}$. Cela est évident dans le cas particulier dont nous venons de parler : car puisque le trentiéme d'un écu de trois liv. est deux sols, il s'ensuit que douze trentiémes de l'écu sont 24 sols : c'est la valeur que nous avions déja trouvée.

Afin d'appercevoir la raison générale & métaphysique de cette opération, prenons $\frac{1}{5}$ au lieu de $\frac{3}{5}$. Je dis donc que $\frac{1}{5}$ de $\frac{4}{6}$ est égal à $\frac{4}{30}$ qui est le produit de $\frac{4}{6}$ par $\frac{1}{5}$: car $\frac{1}{5}$ de $\frac{4}{6}$, c'est-à-dire, un cinquiéme de $\frac{4}{6}$ n'est autre chose que la cinquiéme partie de la fraction $\frac{4}{6}$. Or la cinquiéme partie de $\frac{4}{6}$ est le produit $\frac{1}{5}\times\frac{4}{6}$ ou $\frac{4}{30}$, puisqu'en multipliant le dénominateur 6 par 5, la fraction $\frac{4}{6}$ devient 5 fois moindre qu'elle n'est *; donc * 142
$\frac{1}{5}$ de $\frac{4}{6}$ est $\frac{4}{30}$. Cela posé, il est clair que $\frac{3}{5}$ de $\frac{4}{6}$ est trois fois plus grand que $\frac{4}{30}$; il faut donc multiplier cette derniere fraction par 3 ; c'est-à-dire, qu'il faut encore multiplier le numérateur de $\frac{4}{30}$ par 3, & on aura le produit $\frac{12}{30}$ égal à $\frac{3}{5}$ de $\frac{4}{6}$. Par conséquent pour réduire $\frac{3}{5}$ de $\frac{4}{6}$ à une seule fraction, il faut multiplier $\frac{4}{6}$ par $\frac{3}{5}$. En un mot pour avoir une fraction égale à $\frac{3}{5}$ de $\frac{4}{6}$ il faut prendre trois cinquiémes de $\frac{4}{6}$. Or prendre trois cinquiémes de $\frac{4}{6}$ c'est multiplier la fraction $\frac{4}{6}$ par $\frac{3}{5}$.

171. S'il y avoit plus de deux fractions, il faudroit aussi les multiplier les unes par les autres, afin de les réduire à une seule fraction. Par exemple $\frac{3}{5}$ de $\frac{4}{6}$ de $\frac{7}{8}$ se réduit au produit $\frac{3\times4\times7}{5\times6\times8}=\frac{84}{240}$. C'est la même chose pour les fractions littérales.

DE LA DIVISION DES FRACTIONS.

On peut diviser une fraction par un entier, ou bien une fraction par une autre fraction, ou enfin un entier par une fraction. Nous allons donner la méthode pour ces trois cas.

172. 1°. Pour diviser une fraction par un entier, il faut multiplier le dénominateur de la fraction par l'entier qui est le diviseur, en laissant le même numérateur : par exemple, pour diviser $\frac{2}{3}$ par 4, il faut multiplier le dénominateur 3 par 4, & le quotient sera $\frac{2}{12}$.

Afin de concevoir la raison de cette pratique, il faut faire attention que quand on veut diviser $\frac{2}{3}$ par 4, on en cherche une autre qui n'en soit que la quatriéme partie, ou, ce qui est la même chose, qui soit quatre fois plus petite *. Or pour rendre une fraction plus petite, il n'y a qu'à augmenter son dénominateur *; ainsi pour faire la fraction $\frac{2}{3}$ quatre fois plus petite, il n'y a qu'à rendre son dénominateur quatre fois plus grand, c'est-à-dire, le multiplier par 4, & laisser le même numérateur. Ce qu'il falloit démontrer.

*Liv. I. Art. 86.
* 142.

173. Si on peut diviser exactement le numérateur de la fraction par l'entier, il vaut mieux faire cette division du numérateur, en laissant le même dénominateur : par exemple, le quotient de la fraction $\frac{6}{7}$ divisée par 3, est $\frac{2}{7}$. La raison de cette pratique est évidente, puisqu'en divisant le numérateur par 3, il vient une nouvelle fraction dont le numérateur n'est que le tiers de celui de la premiere ; & par conséquent cette nouvelle fraction n'est aussi que le tiers de la premiere.

174. 2°. Pour diviser une fraction par une autre, il faut multiplier le numérateur de la fraction qui est le dividende par le dénominateur de celle qui sert de diviseur, & le produit sera le numérateur du quotient ;

ensuite il faut multiplier le dénominateur du dividende par le numérateur du diviseur, & le produit sera le dénominateur du quotient : par exemple, si on veut diviser $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$, il faudra multiplier 2 numérateur du dividende par 5 dénominateur du diviseur, & le produit 10 sera le numérateur du quotient : après cela il faudra encore multiplier le dénominateur 3 du dividende par le numérateur 4 du diviseur, on aura le produit 12 pour le dénominateur du quotient qui sera $\frac{10}{12}$.

Voici la démonstration de cette méthode : si on divise une grandeur par plusieurs diviseurs, un quotient est d'autant plus grand que le diviseur est petit. Or on a fait voir dans le premier cas que le quotient de $\frac{2}{3}$ divisé par 4 est $\frac{2}{12}$; ainsi le quotient de $\frac{2}{3}$ divisé par $\frac{4}{5}$ doit être cinq fois plus grand que $\frac{2}{12}$, puisque $\frac{4}{5}$ n'est que la cinquiéme partie de 4 : mais pour rendre la fraction $\frac{2}{12}$ cinq fois plus grande, il n'y a qu'à multiplier le numérateur par 5 : ce qui donnera $\frac{10}{12}$; ainsi cette fraction est le quotient de $\frac{2}{3}$ divisé par $\frac{4}{5}$; donc pour diviser une fraction par une autre, il faut multiplier le numerateur du dividende par le denominateur du diviseur, & le dénominateur du dividende par le numérateur du diviseur.

On peut diviser de la même maniere deux fractions litterales l'une par l'autre. Exemple. Le quotient de $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$ est $\frac{ad}{bc}$.

175. Quand deux fractions ont le même dénominateur, pour lors afin de diviser une de ces fractions par l'autre, il suffit de diviser le numérateur du dividende par le numérateur du diviseur : ainsi le quotient de $\frac{2}{5}$ par $\frac{3}{5}$ est $\frac{2}{3}$. Pour le démontrer d'une maniere générale, prenons deux fractions litterales qui ayent le même dénominateur telles que $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{b}$: il faut

prouver que le quotient de la premiere divisée par la seconde est $\frac{a}{c}$. Selon la regle générale de l'article précedent 174 le quotient de $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{b}$ est $\frac{ab}{cb}$. Or * $\frac{ab}{bc} = \frac{a}{c}$.

* 18.

176. On peut déduire de-là une regle générale pour diviser deux fractions l'une par l'autre. Voici cette regle : il faut réduire les deux fractions au même dénominateur, & ensuite diviser le numérateur du dividende par le numérateur du diviseur : par exemple, pour diviser $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$, je réduis d'abord ces deux fractions au même dénominateur : & je trouve $\frac{10}{15}$ & $\frac{12}{15}$; ensuite je divise 10 par 12 : ce qui donne $\frac{10}{12}$, ainsi le quotient de $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$ est $\frac{10}{12}$. Ce quotient est le même que celui qu'on a trouvé par la premiere méthode de ce second cas.

177. 3°. Pour diviser un nombre entier par une fraction, il faut réduire l'entier à une fraction qui ait l'unité pour dénominateu:, & après cela operer comme nous avons dit qu'on devoit faire pour diviser une fraction par une autre. Exemple. Si on veut diviser 6 par $\frac{3}{4}$, il faut réduire 6 à la fraction $\frac{6}{1}$ qui est égale à 6, & ensuite diviser cette fraction $\frac{6}{1}$ par $\frac{3}{4}$; le quotient sera $\frac{24}{3} = 8$.

Ce troisiéme cas se réduisant au second, n'a pas besoin d'autre démonstration que de celle que nous avons donnée pour le second.

On a déja vû que la méthode du second cas peut être appliquée aux fractions littérales ; il reste à donner des exemples pour le premier & le troisiéme cas. Le quotient de $\frac{a}{b}$ par c est $\frac{a}{bc}$. Le quotient de $a = \frac{a}{1}$ par $\frac{c}{d}$ est $\frac{ad}{c}$.

178. Si on vouloit diviser un entier & une fraction par un entier & une fraction, il faudroit réduire le dividende à une seule fraction, & le diviseur pareillement à une seule fraction ; & ensuite diviser la premiere

miere de ces nouvelles fractions par l'autre : ſoit, par exemple, $3+\frac{1}{2}$ à diviſer par $4+\frac{2}{3}$: je reduis le dividende à la fraction $\frac{7}{2}$, & le diviſeur à cette autre $\frac{14}{3}$; après cela je diviſe $\frac{7}{2}$ par $\frac{14}{3}$, & je trouve au quotient $\frac{21}{28}$.

179. Remarquez que ſi la fraction qui ſert de diviſeur eſt plus petite que l'unité, le quotient ſera plus grand que le dividende : comme ſi on diviſe $\frac{3}{6}$ par $\frac{2}{4}$, le quotient $\frac{12}{12}=1$ eſt plus grand que le dividende $\frac{3}{6}$.

La raiſon de cette remarque eſt que le quotient eſt d'autant plus grand que le diviſeur eſt petit. Or quand le diviſeur eſt l'unité, le quotient eſt égal au dividende ; par conſéquent ſi le diviſeur eſt plus petit que l'unité, le quotient doit être plus grand que le dividende.

D'ailleurs on a dit * que dans toute diviſion le dividende eſt au diviſeur, comme le quotient eſt à l'unité : * 70.
& *alternando*, le dividende eſt au quotient, comme le diviſeur eſt à l'unité ; par conſéquent ſi le diviſeur eſt plus petit que l'unité, le dividende eſt auſſi plus petit que le quotient.

DE LA FORMATION DES PUISSANCES DES FRACTIONS.

Nous ne dirons qu'un mot de cette opération, parce qu'elle eſt très-facile à entendre, après tout ce que nous avons dit juſqu'ici.

180. Pour avoir le quarré d'une fraction, il faut élever le numérateur & le dénominateur, chacun à ſon quarré. Exemple. Le quarré de $\frac{2}{3}$ eſt $\frac{4}{9}$. De même le quarré de $\frac{1}{2}$ eſt $\frac{1}{4}$.

Pour avoir le cube d'une fraction, il faut élever le numérateur & le dénominateur, chacun à ſon cube. Exemple. Le cube de $\frac{2}{5}$ eſt $\frac{8}{125}$.

En général pour avoir une puiſſance d'une fraction, il faut élever le numérateur & le dénominateur à la même puiſſance que celle à laquelle on veut élever la fraction.

La raison de cette opération est bien claire : car pour élever la fraction $\frac{2}{3}$ à son quarré, il faut multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{2}{3}$. Or en multipliant $\frac{2}{3}$ par $\frac{2}{3}$, on aura au produit une fraction, sçavoir $\frac{4}{9}$ dont le numerateur est le quarré de 2, & le dénominateur le quarré de 3 ; par conséquent pour élever une fraction à son quarré, il faut prendre le quarré du numérateur & celui du dénominateur. C'est la même raison pour les autres puissances.

On opere de même sur les fractions littérales. Exemples. Le quarré de $\frac{a}{b}$ est $\frac{aa}{bb}$. Le quarré de $\frac{a+d}{c}$ est $\frac{aa+2ad+dd}{cc}$. Le cube de $\frac{a}{b}$ est $\frac{a^3}{b^3}$.

DE L'EXTRACTION DES RACINES DES FRACTIONS.

181. Pour extraire la racine quarrée d'une fraction, il faut tirer celle du numérateur & celle du dénominateur. Exemples. La racine quarrée de $\frac{4}{9}$ est $\frac{2}{3}$. La racine quarrée de $\frac{25}{36}$ est $\frac{5}{6}$.

En général pour extraire la racine quelconque d'une fraction, il faut tirer la racine semblable du numérateur & du dénominateur de la fraction. Exemple. La racine quatriéme de $\frac{16}{81}$ est $\frac{2}{3}$.

La raison de cette opération se déduit de la formation des puissances des fractions : car si pour élever une fraction à son quarré, il faut élever le numérateur & le dénominateur, chacun à son quarré, il suit que pour tirer la racine quarrée d'une fraction, il faut tirer celle du numérateur & celle du dénominateur, puisque la formation des puissances, & l'extraction des racines sont des opérations contraires. On peut ap-

pliquer le même raisonnement aux autres racines, troisiéme, quatriémé, &c,

Il faut opérer de la même maniere pour l'extraction des racines des fractions littérales. Exemples. La racine quarrée de $\frac{aa}{bb}$ est $\frac{a}{b}$. La racine cubique de $\frac{a^3}{b^3}$ est $\frac{a}{b}$.

182. Si le numérateur & le dénominateur ne sont pas l'un & l'autre des puissances parfaites de la racine que l'on cherche, on ne peut trouver exactement cette racine: par exemple, on ne peut pas tirer exactement la racine quarrée de $\frac{4}{5}$, parce que le dénominateur n'est pas un quarré parfait. Mais alors on peut approcher aussi près que l'on veut de la véritable racine. Pour cet effet il faut 1°. Multiplier les deux termes de la fraction par le dénominateur, afin que la nouvelle fraction qui viendra ait un quarré pour dénominateur. Dans l'exemple proposé je multiplie les deux termes de la fraction $\frac{4}{5}$ par 5, ce qui donne la nouvelle fraction $\frac{20}{25}$ dont le dénominateur est un quarré. 2°. Il faut écrire à la suite des deux termes de la nouvelle fraction une ou plusieurs tranches de deux zeros chacune. On peut mettre uutant de tranches que l'on veut: plus il y en aura, plus on approchera de la véritable racine; mais on doit en mettre le même nombre au numérateur & au dénominateur. 3°. On tirera ensuite la racine quarrée du numérateur & celle du dénominateur: (celle-ci sera exacte, mais la premiere ne le sera pas.) La fraction formée de ces deux racines sera la racine quarrée approchée de la fraction proposée.

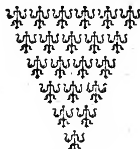
Dans notre exemple après avoir réduit la fraction $\frac{4}{5}$ à celle-ci $\frac{20}{25}$, j'écris ensuite deux tranches de deux ze-

ros à la fin de chacun des termes $\frac{20}{25}$, il vient $\frac{200000}{250000}$. Enfin je tire les racines quarrées des deux termes 200000, & 250000, & j'en forme la fraction $\frac{447}{500}$ qui est un peu moindre que la racine véritable de $\frac{4}{5}$, mais qui n'en differe pas de la 500[me] partie de l'unité: en voici la démonstration. La fraction $\frac{4}{5}$ est égale à $\frac{20}{25}$, parce que l'on a multiplié les deux termes de la premiere fraction par 5. Par la même raison $\frac{20}{25}$ est égale à $\frac{200000}{250000}$, puisqu'en ajoûtant quatre zeros à chacun des termes de la fraction $\frac{20}{25}$ on a multiplié les deux termes de cette fraction par 10000. * Par conséquent la fraction proposée $\frac{4}{5}$ est égale à celle-ci $\frac{200000}{250000}$. Elles ont donc une même racine. Or la fraction $\frac{447}{500}$ est un peu moindre que la racine de $\frac{200000}{250000}$. mais elle n'en differe pas de la 500[me] partie d'une unité: car si on mettoit 448 pour numérateur au lieu de 447, la fraction $\frac{448}{500}$ seroit trop grande, puisque 448 est plus grand que la racine de 200000.

* Liv. I. Art. 49.

Les tranches que l'on écrit à la fin des termes de la fraction dont le dénominateur est un quarré, doivent être de deux zeros, afin que le dénominateur augmenté de ces zeros soit toûjours un nombre quarré; ce qui arrivera nécessairement: car le dénominateur étoit un quarré avant qu'on le multipliât par l'unité suivie d'une ou de plusieurs tranches de deux zeros. D'ailleurs il est évident que l'unité suivie d'une ou de plusieurs tranches de deux zeros est un quarré. Or un quarré multiplié par un quarré donne un produit qui est aussi un quarré: car soient les deux quarrés *aa* & *bb* qui peuvent représenter tous les quarrés. Or le produit de ces deux quarrez, qui est *aabb*, est aussi un quarré, sçavoir celui de *ab*, puisqu'en multipliant *ab* par *ab* le produit est *abab* ou *aabb*.

183. Si on veut tirer la racine cubique approchée de $\frac{4}{5}$ il faut multiplier les deux termes par le quarré du dénominateur, c'est-à-dire, par 25, afin que la nouvelle fraction $\frac{100}{125}$ ait un cube pour dénominateur : ensuite on écrira à la fin des deux termes 100 & 125 une ou plusieurs tranches de trois zeros chacune. Enfin on tirera la racine cubique de chaque terme. On fait de même à proportion pour approcher de la racine quatriéme, cinquiéme, ainsi des autres.





LIVRE TROISIÉME.

DES EQUATIONS.

IL y a deux méthodes générales pour enſeigner & pour découvrir la vérité dans les Sciences ; l'une eſt appellée *ſynthеſe* , & l'autre eſt nommée *analyſe.* Pour bien entendre la maniere dont l'une & l'autre méthode procede, il faut diſtinguer deux cas ou deux occaſions dans leſquelles on en fait uſage ; l'une eſt lorſqu'on veut demontrer la vérité d'une propoſition ; & l'autre, quand on veut trouver la ſolution de quelque problême.

Dans la premiere occaſion la méthode de ſynthеſe conſiſte à expoſer d'abord les principes généraux pour en déduire la propoſition à démontrer : au lieu que dans ce premier cas l'analyſe ſuppoſe que la propoſition dont il s'agit eſt vraye, & enſuite elle conduit de cette ſuppoſition juſqu'à quelque principe connu, en faiſant voir que la propoſition qu'elle a ſuppoſée vraye, a une liaiſon néceſſaire avec le principe. Ainſi la ſynthеſe commence par les principes généraux pour deſcendre à la propoſition à démontrer : au contraire l'analyſe commence par la propoſition à démontrer, pour remonter aux principes généraux.

Dans le ſecond cas, c'eſt-à-dire, lorſqu'il s'agit de réſoudre quelque problême, la ſynthеſe ſe ſert auſſi des principes & des propoſitions connuës pour parvenir à la connoiſſance de ce que l'on cherche. Pour ce qui eſt de l'analyſe, elle ſuppoſe encore ce que l'on cherche comme dans le premier cas ; mais alors elle

ne remonte pas de cette ſuppoſition à quelque principe connu. Voici comme elle procede dans ce ſecond cas.

Lorſque l'on veut trouver la ſolution de quelque problême par l'analyſe, on examine la queſtion propoſée avec toute l'attention poſſible : on la ſuppoſe réſoluë ; & par le moyen des différentes opérations dont nous parlerons dans la ſuite, on déduit ſucceſſivement de cette ſuppoſition pluſieurs conſéquences, juſqu'à ce que l'on ſoit arrivé à la connoiſſance de ce que l'on cherche. Mais ſi en ſuppoſant la queſtion réſoluë, cela conduit à quelque contradiction, c'eſt une marque que ce que l'on a ſuppoſé eſt impoſſible.

Voici un exemple qui fera concevoir comment l'analyſe ſuppoſe le problême réſolu. Il s'agit de trouver un nombre qui ſoit tel qu'étant multiplié par 7, le produit ſoit égal à 84. Il faut appeller x le nombre cherché, & dire enſuite : puiſque ce nombre étant multiplié par 7, le produit eſt égal à 84 ; donc $7x = 84$. Il eſt clair qu'en faiſant cette égalité de $7x$ avec 84, on raiſonne ſur le nombre cherché, comme ſi on le connoiſſoit. C'eſt ainſi que l'analyſe ſuppoſe la queſtion réſoluë : après quoi elle déduit de cette ſuppoſition la ſolution du problême, comme on l'expliquera dans la ſuite.

On ſe ſert ordinairement de la ſyntheſe, lorſqu'on veut enſeigner aux autres les véritez que l'on connoît ſoi-même : c'eſt pour cela que la ſyntheſe eſt appellée *méthode de doctrine.* Mais lorſqu'on veut découvrir la ſolution d'un problême, on ſe ſert preſque toûjours de l'analyſe, que l'on appelle à cauſe de cela, *méthode d'invention.* On réunit auſſi quelquefois ces deux méthodes pour trouver plus facilement ce que l'on cherche.

La méthode analytique eſt ſi utile dans les Mathématiques, que l'on découvre par ſon moyen avec une extrême facilité la ſolution de quantitez de problêmes

que l'on n'auroit osé esperer de résoudre sans le secours de cet art merveilleux. Or c'est par les équations que l'on fait l'application de l'analyse aux problêmes dont on cherche la solution.

ART. I. Lorsqu'une ou plusieurs quantitez sont égales à une ou à plusieurs autres quantitez, cela s'appelle *équation* : par exemple, $10=7+3$ est une équation, parce que 10 est une quantité égale à $7+3$. De même $9+5=20-6$ est encore une équation, parce que $9+5$ font 14 aussi-bien que $20-6$. En lettres, si on suppose que $ax-2b$ égale $4cy+d$, on aura l'équation $ax-2b=4cy+d$.

2. Ce qui se trouve à la gauche du signe d'égalité, est nommé *premier membre* de l'équation, & ce qui est à la droite est appellé *second membre* : ainsi dans le premier exemple, 10 est le premier membre, & $7+3$ est le second : de même dans le second exemple, $9+5$ est le premier membre, & $20-6$ est le second.

3. Chaque quantité de l'un & de l'autre membre est appellée *terme*: ainsi dans le troisiéme exemple qui est $ax-2b=4cy+d$, la quantité ax est un terme, & l'autre grandeur $-2b$ est un autre terme : pareillement $4cy$ & d sont les termes du second membre de la même équation.

4. Dans tout problême il y a des grandeurs inconnuës, puisque si tout étoit connu, on ne feroit point de question : mais il faut aussi qu'il y ait des rapports connus, soit entre les grandeurs inconnuës comparées avec les connuës, soit entre les grandeurs inconnuës comparées entr'elles, pour conduire à la connoissance des inconnuës, à laquelle il seroit impossible de parvenir, s'il n'y avoit quelque chose de connu : par exemple, si on demande quel est le nombre qui multiplié par 4 donne un produit qui soit égal à 60, on ne peut trouver ce nombre qu'à cause du rapport qu'il a avec 60 : ce rapport consiste en ce que le nombre étant

multiplié par 4, le produit eſt égal à 60. Il eſt facile de voir que le nombre cherché eſt 15.

5. Dans les équations on ſe ſert ordinairement des premieres lettres de l'alphabet a, b, c, d, &c. pour déſigner les grandeurs connuës ; & pour déſigner les inconnuës, on ſe ſert des dernieres lettres r, s, t, u, x, y, z : il arrive cependant aſſez ſouvent qu'on employe les lettres initiales des noms, pour marquer les grandeurs, ſoit connuës, ſoit inconnuës, que ces noms ſignifient : ainſi le mouvement ſe marque par m, la viteſſe par v, le tems par t, &c.

6. Les équations ſont de différens degrez : ſçavoir, du premier, du ſecond, du troiſiéme, du quatriéme, du cinquiéme, &c. ſelon que l'inconnuë eſt élevée à la premiere puiſſance, à la ſeconde, à la troiſiéme, à la quatriéme, à la cinquiéme, &c. ainſi une équation eſt du premier degré, lorſque l'inconnuë eſt élevée à la premiere puiſſance : telles ſont les équations $x+b=c$ & $ax+b=c$. Une équation eſt du ſecond degré, lorſque l'inconnuë eſt élevée à la ſeconde puiſſance : telles ſont les équations $xx=c$ & $xx+ax=c$. Une équation eſt du troiſiéme degré, lorſque l'inconnuë eſt élevée à la troiſiéme puiſſance : telle eſt l'équation $x^3+ax^2+bx=cdf$. Il en eſt de même des autres équations qui ſont d'un degré plus-élevé.

7. Remarquez que le degré d'une équation ſe prend du terme où l'inconnuë eſt élevée à la plus haute puiſſance. Ainſi, quoique dans l'équation qu'on a apportée pour exemple du troiſiéme degré, il y ait un terme où l'inconnuë ne ſoit élevée qu'à la ſeconde puiſſance, & un autre où elle eſt élevée à la premiere ; cela n'empêche pas que l'équation ne ſoit du troiſiéme degré, parce qu'il y a un terme où l'inconnuë eſt élevée à la troiſiéme puiſſance.

8. En parlant de differens degrez des équations, nous avons ſuppoſé qu'il n'y avoit qu'une eſpece d'in-

connuë dans une équation ; mais s'il y a differentes inconnuës, pour lors le degré de l'équation dépend du terme qui a le plus de racines inconnuës : par exemple, l'équation $x^2y^3+ay^4=bc$ est du cinquiéme degré, parce que le premier terme x^2y^3 contient cinq racines inconnuës, sçavoir, x, x & y, y, y : mais l'équation $x^3+axy=c-d$ n'est que du troisiéme degré, parce que le terme x^3 qui contient le plus de racines inconnuës, n'est que la troisiéme puissance de x.

Notre dessein dans cet Abregé est de donner la méthode de résoudre seulement les équations du premier degré.

Pour résoudre une équation, il faut se servir de differentes opérations dont il est nécessaire de parler. Or ces opérations doivent se faire de maniere que le premier membre reste toûjours égal au second. Il y en a plusieurs : sçavoir, l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, la substitution, l'extraction des racines, &c.

9. On se sert de l'addition lorsque l'on veut faire passer une quantité négative d'un membre dans un autre : par exemple, si dans l'équation $ax-2b=4cy+d$, on veut faire passer $-2b$ dans le second membre, il faut d'abord ajoûter $+2b$ dans chacun des membres ; ce qui donnera $ax-2b+2b=4cy+d+2b$. Or dans le premier membre les deux quantitez $-2b$ & $+2b$ se détruisent ; donc l'équation précedente se réduit à celle-ci $ax=4cy+d+2b$.

10. De-là il suit que pour faire passer une quantité négative d'un membre dans un autre, il n'y a qu'à l'effacer dans le membre où elle est, & l'écrire dans l'autre membre avec le signe $+$: par exemple, si on a l'équation $9+5=20-6$, & qu'on veuille faire passer la grandeur -6 dans le premier membre, il faut écrire $9+5+6=20$.

Il eſt évident que par cette opération on ne détruit pas l'égalité qui étoit entre les deux membres, puiſque l'on ajoûte la même grandeur à chacun de ces membres.

11. On ſe ſert de la ſouſtraction lorſqu'on veut faire paſſer une quantité poſitive d'un membre dans un autre : par exemple, ſi on a l'équation $3y+b=d$, & qu'on veuille faire paſſer $+b$ dans le ſecond membre ; il faut ſouſtraire b de chaque membre ; on aura $3y+b-b=d-b$. Or $+b$ & $-b$ ſe détruiſent dans le premier membre ; donc l'équation précedente ſe réduit à celle-ci $3y=d-b$.

12. On peut conclure de là que pour faire paſſer une quantité poſitive d'un membre dans l'autre, il n'y a qu'à ne la point mettre dans le membre où elle étoit, & l'écrire dans l'autre avec le ſigne $-$; ce qui ne détruit point l'égalité des deux membres, puiſque l'on ne fait par-là que ſouſtraire la même grandeur de chacun des membres.

13. On voit donc que l'on peut faire paſſer toutes ſortes de quantitez d'un membre de l'équation dans l'autre ſans détruire l'égalité des deux membres ; il ſuffit pour cela de ne point écrire cette quantité dans le membre où elle ſe trouvoit, & de la mettre dans l'autre membre avec un ſigne oppoſé à celui qu'elle avoit.

14. La multiplication eſt d'uſage dans les équations, lorſqu'il y a quelque fraction que l'on veut ôter. Pour cet effet il faut multiplier tous les termes de l'équation par le dénominateur de la fraction que l'on veut ôter : ſoit l'équation $\frac{x}{a}+b=z-d$ dont on veut faire évanouir la fraction $\frac{x}{a}$: il faut multiplier tous les termes de l'équation par le dénominateur a ; & on aura l'équation ſuivante $\frac{ax}{a}+ab=az-ad$: mais $\frac{ax}{a}$ eſt égal à x * : ainſi la derniere équation ſe réduit à celle-ci *Liv. 1. art. 166
$x+ab=az-ad$.

15. Il paroît par cet exemple qu'après avoir ôté la fraction de cette équation, le numérateur x est resté à la place de la fraction $\frac{x}{a}$. On peut donc dire en général que pour faire évanouir une fraction, il n'y a [illegible] à multiplier tous les termes de l'équation par le dénominateur de cette fraction, & laisser le numérateur à la place de la fraction sans le multiplier.

16. S'il y a plusieurs fractions dans l'équation, il faut d'abord faire évanoüir une des fractions en multipliant tous les termes de l'équation par le dénominateur de la fraction que l'on veut faire évanoüir la premiere; ensuite multiplier cette équation, dont on a ôté la premiere fraction, par le dénominateur de la fraction que l'on veut faire évanoüir la seconde, & ainsi de suite. Soit l'équation $\frac{x}{a}+b=\frac{z}{c}-d$ dont il faut ôter les deux fractions : je commence par multiplier tous les termes par a : ce qui donne la nouvelle équation $x+ab=\frac{az}{c}-ad$, que je multiplie ensuite par c, & il vient cette autre équation $cx+acb=az-acd$, dans laquelle il n'y a plus de fraction.

Il est clair qu'on ne détruit point l'équation ou l'égalité par toutes ces multiplications, puisque l'on ne fait que multinlier les deux membres, qui sont des quantitez égales, par une même grandeur.

17. On se sert de la division pour dégager l'inconnuë qui est multipliée par une quantité connuë : cela se fait en divisant tous les termes de l'équation par la quantité connue qui multiplie l'inconnue : par exemple, soit l'équation $ax+b=cd$ dont la quantité inconnue x est multipliée par a : afin de dégager cette quantité inconnue, & de la laisser seule pour un des termes de l'équation ; il faut diviser tous les termes par a : ce qui donnera $\frac{ax}{a}+\frac{b}{a}=\frac{cd}{a}$. Or $\frac{ax}{a}$ est égal à x ; par conséquent l'équation précedente deviendra $x+\frac{b}{a}=\frac{cd}{a}$ où l'inconnue seule x est un des termes de l'équation.

18. Il paroît donc que pour dégager l'inconnue d'une quantité connue qui la multiplie, il n'y a qu'à laisser l'inconnue toute seule pour un des termes de l'équation, & diviser tous les autres termes par la quantité qui multiplie l'inconnue. En voici encore des exemples: soit l'équation $3x - b = c + d$: afin de dégager l'inconnue x, il faut diviser tous les termes de l'équation par le coefficient 3 qui multiplie l'inconnue, & on aura $x - \frac{b}{3} = \frac{c}{3} + \frac{d}{3}$.

Le second membre de cette équation qui est $\frac{c}{3} + \frac{d}{3}$ est la même chose que $\frac{c+d}{3}$, parce que les deux fractions $\frac{c}{3}$ & $\frac{d}{3}$ ayant le même dénominateur, on peut les réduire en une seule qui ait le dénominateur commun, & dont le numérateur soit la somme des numérateurs de deux fractions *: ainsi l'équation $x - \frac{b}{3} = \frac{c}{3} + \frac{d}{3}$ est la même que celle-ci, $x - \frac{b}{3} = \frac{c+d}{3}$. Enfin pour dégager l'inconnue x de l'équation $ax - cx = b + d$, j'observe que l'inconnue x est multipliée par $a - c$ dans cette équation, puisque $ax - cx$ est le produit de x par $a - c$, ou de $a - c$ par x; c'est pourquoi en divisant l'équation proposée par $a - c$, elle se réduit à $x = \frac{b+d}{a-c}$.

* Liv. II art. 161

Il est aisé de voir que la division dont on se sert pour dégager l'inconnue, ne détruit point l'égalité, non plus que la multiplication, puisque l'on divise deux quantitez égales; sçavoir, les deux membres de l'équation par le même diviseur.

19. On se sert de l'extraction des racines lorsque l'inconnue est élevée au quarré, au cube ou à quelque autre puissance; auquel cas on tire la racine qui répond à la puissance de l'inconnue, c'est-à-dire, que si l'inconnue est élevée au quarré dans l'équation, il faut tirer la racine quarrée; si elle est élevée au cube, il faut tirer la racine cubique; si elle est élevée à la quatriéme puissance, il faut extraire la racine qua-

triéme, &c. Par exemple, si on a l'équation $xx=aa$ dont l'inconnuë x est élevée au quarré, il faut tirer la racine quarrée de chaque membre de l'équation, & on aura $x=a$. De même pour résoudre l'équation $x^3=a+c$, il faut tirer la racine cubique de chaque membre, ce qui donnera $x=\sqrt[3]{a+c}$.

Il est évident qu'on ne détruit point l'égalité par cette opération : car l'on ne fait que tirer les racines semblables des deux membres qui sont des quantitez égales. Or les racines semblables, c'est-à-dire, ou quarrées, ou cubiques, &c. de quantitez égales, sont égales.

20. Une des principales opérations nécessaires pour résoudre les équations, est la substitution qui consiste à mettre la valeur d'une inconnuë à la place de cette inconnuë. Si on a, par exemple, les deux équations $x+y=a$ & $x-y=d$, & qu'on veüille substituer dans la premiere équation la valeur de x à la place de cette inconnuë, il faut prendre la valeur de x dans la seconde équation ; ce qui se fait en laissant x seule dans le premier membre, & la seconde équation sera $x=d+y$; ainsi $d+y$ est la valeur de x : on substituera ensuite $d+y$ à la place de x dans la premiere équation ; & on aura $d+y+y=a$, au lieu de $x+y=a$.

Si on avoit voulu substituer la valeur de y dans la seconde des deux équations proposées, il auroit fallu prendre cette valeur dans la premiere équation, en laissant y seule dans le premier membre ; ce qui auroit donné $y=a-x$; après quoi on auroit mis $a-x$ à la place de y dans la seconde équation : mais comme y est par soustraction dans cette seconde équation à cause du signe $-$, il auroit été nécessaire de soustraire $a-x$: or la soustraction se fait en changeant les signes ; ainsi il auroit fallu mettre $-a+x$ à la place de y : & la seconde équation seroit devenuë $x-a+x=d$.

Soient aussi les deux équations $x+m=y+b$ & $ax=c-d+y$: si l'on veut substituer dans la seconde équation la valeur de x à la place de cette inconnuë, il faut prendre cette valeur dans la premiere équation qui devient $x=y+b-m$, & mettre ensuite $y+b-m$ à la place de x dans la seconde équation : mais comme x est multipliée par a dans cette seconde équation, il faut pareillement multiplier $y+b-m$ par a, & on aura le produit $ay+ab-am$ égal à ax; ainsi après la substitution, la seconde équation sera $ay+ab-am=c-d+y$.

On appliquera ces differentes opérations pour pratiquer les trois regles suivantes, qui feront trouver la solution des problêmes du premier degré.

21. La premiere consiste à réduire le problême en équations. Afin de mettre cette regle en pratique, il faut faire une grande attention aux conditions du problême qui donnent lieu de former les équations, en exprimant les rapports des grandeurs connuës avec les inconnuës, ou même ceux qui sont entre les quantitez inconnuës comparées ensemble. I. Regl.

Nous allons appliquer cette regle à un exemple, avant de proposer les deux autres, afin de la faire mieux concevoir : nous ferons pareillement l'application de la seconde regle, avant de proposer la troisiéme.

PROBLEME I.

22. *Pierre & Jean ont chacun un certain nombre d'écus qu'il s'agit de trouver : on suppose que si Pierre donnoit cinq de ses écus à Jean, ils en auroient autant l'un que l'autre : mais si Jean en donnoit cinq des siens à Pierre, pour lorr Pierre en auroit le triple de ce qui en resteroit à Jean. Combien Pierre & Jean avoient-ils d'écus chacun ?*

Pour mettre ce problême en équations, j'appelle x le nombre des écus de Pierre, & y le nombre des écus de Jean : cela posé, je raisonne ainsi : le nombre des

écus de Pierre étant x ; lorſqu'il en aura donné cinq à Jean, le reſte des écus de Pierre ſera $x-5$, & le nombre des écus de Jean ſera $y+5$. Or par la premiere condition du problême, Pierre & Jean auront autant d'écus l'un que l'autre, après que le premier en aura donné cinq des ſiens au ſecond ; par conſéquent $x-5=y+5$: voilà une équation qui exprime la premiere condition du problême.

Il faut faire une autre équation qui ſoit tirée de la ſeconde partie du problême. On ſuppoſe dans cette ſeconde partie que Jean donne cinq de ſes écus à Pierre ; ainſi le nombre de écus de Jean ſera $y-5$, & celui de Pierre ſera $x+5$. Or par la ſeconde condition du problême, Jean ayant donné cinq écus à Pierre, pour lors Pierre en a trois fois plus que Jean ; par conſéquent $x+5$ eſt trois fois plus grand que $y-5$; donc afin que $y-5$ devienne égal à $x+5$, il faut le multiplier par 3. Or le produit de $y-5$ par 3 eſt $3y-15$; donc $3y-15=x+5$. Ainſi les deux équations qui expriment les conditions du problême ſont $x-5=y+5$ & $3y-15=x+5$.

23. Il ne faut pas d'autres équations pour réſoudre le problême propoſé ; parce que n'y ayant que deux choſes inconnues, ſçavoir, le nombre des écus de Pierre & celui des écus de Jean, on n'a beſoin que de deux équations pour réſoudre ce problême. En général il faut faire autant d'équations qu'il y a d'inconnues : il y a cependant des problêmes dont les conditions ne donnent pas autant d'équations qu'il y a d'inconnues ; & pour lors ces problêmes ſont indéterminez ; c'eſt-à-dire, qu'ils ont pluſieurs ſolutions & même une infinité : nous en donnerons un exemple dans la ſuite. Venons à préſent à la ſeconde regle.

On conçoit bien que tandis que les inconnues ſeront mêlées enſemble dans chacune des équations, on ne pourra ſçavoir la valeur préciſe de chacune des inconnues ;

inconnuës ; c'eſt pourquoi il faut faire en ſorte de parvenir à une équation qui ne contienne qu'une eſpece d'inconnuë. C'eſt ce que preſcrit la regle ſuivante, qui eſt la ſeconde.

24. Cette ſeconde regle conſiſte donc à trouver une nouvelle équation par le moyen des premieres, qui ne contienne qu'une eſpece d'inconnue. Or cela ſe fait en ſubſtituant la valeur d'une ou de pluſieurs inconnues à la place de ces inconnues. Il faut donc prendre la valeur d'une inconnue dans une équation, comme nous l'avons dit *, & ſubſtituer cette valeur dans les autres équations de la maniere dont cette inconnue s'y trouve ; c'eſt-à-dire ; que ſi l'inconnue ſe trouve par addition, la valeur doit y être ſubſtituée par addition ; ſi l'inconnue eſt retranchée, ſa valeur doit être auſſi retranchée ; ſi l'inconnue eſt multipliée par quelque grandeur, ſa valeur doit être multipliée par la même grandeur &c. ainſi que l'on a vû dans l'Article 20. II.Reg. * 20.

Nous allons faire l'application de cette ſeconde regle à l'exemple du premier Problême.

Les deux équations trouvées ſont $x-5=y+5$ & $3y-15=x+5$; pour en faire une qui ne contienne qu'une eſpece d'inconnue, on laiſſe une des inconnues, ſçavoir x, toute ſeule dans un des membres de la premiere équation, afin d'en avoir la valeur. Or pour laiſſer x ſeule dans un membre, il faut faire paſſer -5 dans l'autre membre ; & au lieu de l'équation $x-5=y+5$, on aura $x=y+5+5$, ou bien, $x=y+10$; ainſi la valeur de x eſt $y+10$, qu'il faut ſubſtituer à la place de x dans la ſeconde équation $3y-15=x+5$. En faiſant cette ſubſtitution, on trouvera $3y-15=y+10+5$, ou bien, $3y-15=y+15$.

Nous voilà donc parvenus à une équation qui ne contient qu'une eſpece d'inconnue ; ſçavoir, la grandeur y qui marque le nombre des écus de Jean. Il reſte à préſent à chercher par le moyen de cette équation,

quelle eſt la valeur toute connue de cette grandeur : c'eſt ce que nous trouverons par la troiſiéme regle.

III. Reg 25. Cette troiſiéme regle conſiſte à laiſſer la quantité inconnue toute ſeule dans un des membres, en faiſant paſſer toutes les grandeurs connues dans l'autre membre. Il eſt évident que la quantité inconnue deviendra connue par ce moyen, puiſqu'elle ſera égale à des quantitez connues.

Pour appliquer cette regle à notre exemple, il faut reprendre l'équation que la ſeconde regle a fait trouver; la voici, $3y-15=y+15$: je fais d'abord paſſer -15 du premier membre dans le ſecond; & j'aurai $3y=y+15+15$, ou $3y=y+30$: & faiſant auſſi paſſer y du ſecond membre dans le premier, il vient $3y-y=30$, ou $2y=30$. Enfin y étant multipliée par 2 dans le premier membre de cette derniere équation, je diviſe tous les termes par 2, afin de laiſſer y ſeule dans le premier membre : cette diviſion étant faite, la derniere équation ſe réduit à $y=15$; c'eſt-à-dire, que Jean avoit 15 écus.

Pour ſçavoir combien en avoit Pierre, il faut ſubſtituer 15 à la place de y dans quelques-unes des équations où ſe trouvent les deux inconnues x & y. Je mets donc 15 à la place de y dans la premiere équation, qui eſt $x-5=y+5$: ce qui donne l'équation ſuivante, $x-5=15+5$ ou $x-5=20$: & faiſant paſſer -5 dans le ſecond membre, afin que x reſte ſeule dans le premier, il vient $x=20+5$, ou $x=25$; c'eſt-à-dire, que Pierre avoit 25 écus.

Ces deux nombres 25 & 15 rempliſſent les conditions du problême propoſé : car ſi Pierre avoit donné cinq de ſes écus à Jean, ils en auroient eu autant l'un que l'autre : ainſi ces deux nombres ſatisfont déja à la premiere partie du problême. D'ailleurs ſi Jean avoit donné cinq de ſes écus à Pierre, qui en avoit 25, Jean n'en auroit plus eu que 10, & Pierre en auroit eu

30, & par conſéquent Pierre en auroit eu le triple de ce qui en ſeroit reſté à Jean : ce qui ſatisfait encore à la ſeconde partie du problême.

On propoſe communément un problême de même eſpece, dans lequel on ſuppoſe qu'une âneſſe & une mule ont chacune un certain nombre de ſacs, en ſorte que ſi la mule en donnoit un des ſiens à l'âneſſe, elles en auroient autant l'une que l'autre : mais au contraire, ſi l'âneſſe en donnoit un des ſiens à la mule, pour lors la mule en auroit le double de ce qui en reſteroit à l'âneſſe.

Il s'agit de trouver le nombre des ſacs de l'âneſſe & celui des ſacs de la mule.

Pour obſerver la premiere regle, on nommera a le nombre des ſacs de l'âneſſe, & m celui des ſacs de la mule, & on trouvera que les deux équations qui expriment la nature du problême, ſont $m-1=a+1$ & $2a-2=m+1$.

Enſuite ſi, pour obſerver la ſeconde regle, on prend la valeur de m dans la premiere équation, & qu'on ſubſtitue cette valeur, qui eſt $a+2$, dans la ſeconde équation à la place de m, on aura $2a-2=a+2+1$, ou $2a-2=a+3$.

Enfin en appliquant la troiſiéme regle ſur l'équation $2a-2=a+3$, qui ne contient qu'une eſpece d'inconnue, ſçavoir a, on trouvera $a=5$: puis en ſubſtituant cette valeur toute connue de a dans la premiere équation $m-1=a+1$, on trouve auſſi $m=7$; par conſéquent l'âneſſe avoit 5 ſacs & la mule 7.

Nous allons donner pluſieurs autres problêmes, dont nous chercherons la ſolution en nous ſervant des mêmes regles, qui ſont, comme on l'a dit, au nombre de trois, dont la premiere conſiſte à mettre le problême en équations ; la ſeconde, à trouver une équation formée des premieres, qui ne contienne qu'une eſpece d'inconnue ; & la troiſiéme enfin, à laiſſer l'in-

connue toute seule dans un des membres de l'équation que la seconde regle a fait trouver.

26. C'est la premiere de ces trois regles qui est ordinairement la plus difficile à mettre en pratique, parce qu'il n'y a point de méthode fixe qu'on puisse prescrire pour l'application de cette regle. Ce que l'on peut dire en général, c'est qu'il faut faire une grande attention à la nature & aux conditions du problême, afin d'appercevoir les différens rapports qui sont entre les quantitez, soit connues, soit inconnues, & qui peuvent donner lieu à former des équations. Il arrive souvent que la solution d'un problême dépend d'une proprieté connue par quelque partie des Mathématiques : si cette proprieté renferme une proportion, il est bien facile d'en faire une équation, puisque le produit des extrêmes est égal à celui des moyens.

27. L'illustre M. Newton remarque dans son Arithmétique universelle, que réduire une question ou un problême en équations, c'est la traduire, pour ainsi dire, en langage algébrique : pour cela on donne des noms aux quantitez, soit connues, soit inconnues, qui entrent dans la question, c'est-à-dire, qu'on désigne ces quantitez par des lettres, & on exprime ensuite par ces lettres les rapports que les quantitez ont entr'elles. Cette remarque peut beaucoup aider à trouver les équations d'un problême. Nous en allons faire l'application à notre premier problême, dans lequel il s'agit de trouver le nombre des écus de Pierre & celui des écus de Jean, en supposant que ces deux nombres sont désignés par les lettres dont nous nous sommes servis.

1°. Si Pierre donnoit cinq de ses écus à Jean, ils en auroient autant l'un que l'autre : cela se traduit ainsi en langage algébrique, $x - 5 = y + 5$.

2°. Si Jean donnoit cinq des siens à Pierre, celui-ci en auroit trois fois plus qu'il n'en resteroit à Jean. Cette se-

conde condition s'exprime algébriquement en cette maniere : $x+5=y-5\times 3$, ou bien, $x+5=3y-15$.

28. Quant à la seconde regle, qui prescrit de faire une nouvelle équation par le moyen des premieres, qui ne contienne qu'une espece d'inconnue, elle peut être réduite en pratique par une opération différente de la substitution, sçavoir par l'addition ou la soustraction : c'est-à-dire, en ajoûtant les deux premieres équations ensemble, ou en retranchant l'une de l'autre, selon qu'il est nécessaire pour faire évanoüir une des deux inconnues. Nous allons appliquer cette méthode de pratiquer la seconde regle aux deux exemples précédents.

Les deux premieres équations du premier exemple sont, $x-5=y+5$ & $3y-15=x+5$: en retranchant l'équation $x-5=y+5$, ou $y+5=x-5$ de l'autre, c'est-à-dire, le premier membre de l'une du premier membre de l'autre, & pareillement le second du second, le reste est $3y-15-y-5=x+5-x+5$, qui se réduit à $2y-20=10$; d'où l'on tire d'abord $2y=30$, & ensuite $y=15$.

Les deux équations du second exemple sont, $m-1=a+1$ & $2a-2=m+1$: ôtant celle-ci $m-1=a+1$, ou $a+1=m-1$ de l'autre, je trouve $2a-2-a-1=m+1-m+1$, qui se réduit à $a-3=2$: d'où l'on tire $a=5$.

29. Pour sçavoir laquelle des deux opérations, l'addition ou la soustraction on doit employer, il faut considérer les signes de plus & de moins de l'inconnue dans les deux équations : car si les signes de cette inconnue sont différens dans les deux équations, il faut ajoûter une équation à l'autre : mais si ces signes sont semblables, il faut retrancher l'une de l'autre.

30. Si l'inconnue qu'on veut faire disparoître est multipliée par une autre quantité dans une des équations, il faut multiplier tous les termes de l'autre

équation par cette même quantité avant de faire l'addition ou la soustraction.

31. Il faut remarquer que souvent il n'y a qu'une inconnue dans le Problême, auquel cas la seconde regle n'a point de lieu ; mais seulement la premiere & la troisiéme, comme on le verra dans plusieurs des Problêmes suivans.

PROBLÊME II.

32. *La somme de deux nombres étant connue, & la différence ou l'excès de l'un sur l'autre étant aussi connu, trouver quels sont ces deux nombres.*

Par exemple, si la somme des deux nombres est 40, & que leur différence soit 8, il s'agit de trouver quels sont les deux nombres, qui pris ensemble font 40, & dont la différence est 8.

Pour résoudre ce Problême d'une maniere générale, nous supposerons la somme 40 désignée par a, & la différence 8 par d : nous appellerons aussi la plus grande des inconnues x, & la petite y. Cela posé, je raisonne ainsi : Puisque les deux grandeurs inconnues prises ensemble font la somme connue a, nous aurons déja l'équation suivante $x+y=a$.

D'ailleurs la différence des deux inconnues, c'est-à-dire, l'excès de la plus grande sur la plus petite, étant désignée par d, il s'ensuit qu'en ôtant la plus petite de la plus grande, le reste sera égal à d ; nous aurons donc encore l'équation $x-y=d$: ainsi les deux équations qui renferment les conditions du Problême, sont $x+y=a$ & $x-y=d$.

Il n'y a que ces deux équations à faire pour résoudre le Problême, parce qu'il n'y a que les deux inconnues x & y ; c'est pourquoi il faut passer à la seconde regle, c'est-à-dire, qu'il faut, par le moyen de la substitution, faire une nouvelle équation qui ne contienne qu'une espece d'inconnue. Pour cela je prends

la valeur de x dans la ſeconde des deux équations trouvées, qui eſt $x-y=d$: il faut donc faire paſſer $-y$ dans le ſecond membre; & il viendra $x=d+y$; ainſi la valeur de x eſt $d+y$: je ſubſtitue cette valeur à la place de x dans la premiere équation $x+y=a$; & je trouve la nouvelle équation $d+y+y=a$, ou $d+2y=a$, laquelle ne contient qu'une eſpece d'inconnue, ſçavoir y, dont on trouvera la valeur par le moyen de la troiſiéme regle, de la maniere ſuivante.

Puiſque $d+2y=a$; donc $2y=a-d$: mais comme y eſt multipliée par 2 dans cette derniere équation, il faut diviſer toute l'équation par 2, afin de dégager l'inconnue y; ce qui donne $y=\frac{a}{2}-\frac{d}{2}$. Mettant à préſent cette valeur toute connue de y dans la premiere équation $x+y=a$, il vient $x+\frac{a}{2}-\frac{d}{2}=a$; ainſi $x=a-\frac{a}{2}+\frac{d}{2}$: enſuite réduiſant l'entier a en fraction, qui ait pour dénominateur 2, il vient * $x=\frac{2a}{2}-\frac{a}{2}+\frac{d}{2}$. Mais $\frac{2a}{2}-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}$; donc $x=\frac{a}{2}+\frac{d}{2}$. Or $\frac{a}{2}$ exprime la ſomme diviſée par 2; c'eſt-à-dire, la moitié de la ſomme; & $\frac{d}{2}$ marque la moitié de la différence. Ainſi le plus grand des deux nombres cherchez déſigné par x, eſt égal à la moitié de la ſomme, plus à la moitié de la différence. Pareillement l'équation $y=\frac{a}{2}-\frac{d}{2}$ ſignifie que le plus petit de deux nombres cherchez marqué par y, eſt égal à la moitié de la ſomme moins la moitié de la différence.

*Liv. 2. art. 153

Dans l'éxemple propoſé, la ſomme des deux nombres cherchez eſt 40, & la difference eſt 8; ainſi la moitié de la ſomme eſt 20, & la moitié de la différence eſt 4; par conſéquent le plus grand des deux nombres eſt $20+4=24$; & le plus petit eſt $20-4=16$. Il eſt évident que ces deux nombres ſatisfont au Problême, puiſque la ſomme de 24 & de 16 eſt 40, & que la différence ou l'excès de 24 ſur 16 eſt 8.

Après avoir trouvé les deux premieres équations

$x+y=a$ & $x-y=d$, on auroit pû parvenir à l'équation $2y=a-d$, qui ne renferme qu'une espece d'inconnue, en retranchant celle-ci $x-y=d$ de l'autre $x+y=a$: car après cette soustraction le reste est $x+y-x+y=a-d$, ou bien, $2y=a-d$.

On auroit pû aussi trouver la valeur d'x en ajoûtant ensemble les deux équations $x+y=a$, & $x-y=d$: car la somme de ces deux équations est $2x=a+d$: & en divisant chaque membre de cette derniere égalité par 2, on en conclut $x=\frac{a+d}{2}$, ou bien, $x=\frac{a}{2}+\frac{d}{2}$.

33. Il paroît par la solution générale du Problême, que la plus grande de deux quantitez inégales, est toûjours égale à la moitié de la somme de ces quantitez, plus à la moitié de la différence ; & que la plus petite est égale à la moitié de la somme moins la moitié de la différence. Il faut retenir cette proposition qui est d'un grand usage dans les Mathématiques.

34. On peut résoudre le même Problême plus facilement, en employant une seule équation & une seule espece d'inconnue. Pour cela, il faut faire attention qu'en ôtant du plus grand nombre la différence des deux, le reste est égal au plus petit ; par conséquent le plus grand étant marqué par x, le plus petit sera désigné par $x-d$; ainsi la somme des deux nombres est $x+x-d$; donc on aura l'équation $x+x-d=a$; par conséquent $2x-d=a$; donc $2x=a+d$; donc $x=\frac{a}{2}+\frac{d}{2}$; ainsi la valeur de x est $\frac{a}{2}+\frac{d}{2}$: c'est la même que celle qu'on a trouvée par la premiere méthode. Cette valeur de x étant trouvée, on en ôtera la différence, & le reste sera le plus petit des deux nombres.

PROBLEME III.

35. *Un Berger étant interrogé combien il y avoit de moutons dans son troupeau, répondit que s'il en avoit encore le tiers & de plus le quart de ce qu'il en a, & cinq*

par-dessus, il en auroit cent. On demande quel est le nombre des moutons.

On voit bien qu'il n'y a qu'une inconnue dans ce Problême, sçavoir, le nombre des moutons, c'est pourquoi il n'y a qu'une équation à faire.

Nous nommerons x le nombre inconnu des moutons, a le nombre de cent que le Berger auroit eu, en ajoûtant à x le tiers & le quart de x & cinq de plus. Voici comme je raisonne pour mettre le Problême en équation : puisqu'en ajoûtant au nombre de moutons que le Berger a actuellement, le tiers de ce nombre, ensuite le quart & cinq de plus, la somme seroit égale à cent, il s'ensuit que x nombre des moutons du Berger, plus le tiers de x, plus le quart de x, plus cinq égalent a, c'est-à-dire, cent. Or le tiers de x se marque par la fraction $\frac{x}{3}$, qui signifie x partagée ou divisée par 3 : de même le quart de x se marque par $\frac{x}{4}$; ainsi l'équation qui exprime le Problême est $x+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+5=a$.

Voilà donc la premiere regle observée : mais comme il n'y a qu'une seule équation pour exprimer le Problême, parce qu'il n'y a qu'une espece d'inconnue ; la seconde regle n'a point de lieu dans ce Problême : c'est pourquoi il faut préparer l'équation en faisant évanouir les fractions, & passer ensuite à l'application de la troisiéme regle.

Je fais donc évanouir la premiere fraction en multipliant toute l'équation par le dénominateur 3 *; ce qui donne cette autre équation $3x+x+\frac{3x}{4}+15=3a$: je fais ensuite évanouir l'autre fraction, en multipliant de même cette derniere équation par le dénominateur 4; & il vient $12x+4x+3x+60=12a$, ou bien, $19x+60=12a$; donc $19x=12a-60$. Or $a=100$; donc $12a=1200$; donc $19x=1200-60$, ou $19x=1140$: mais comme x est multipliée par 19 dans le

* 14.

premier membre, il faut diviser toute l'équation par 19, afin que x demeure seule dans le premier membre. Or en divisant 1140 par 19, le quotient est 60; par conséquent on aura l'équation suivante $x=60$; c'est-à-dire, que le Berger avoit 60 moutons dans son troupeau. Ce nombre satisfait aux conditions du Problême : car si à 60 on ajoûte le tiers qui est 20, & le quart qui est 15 & 5 de plus, la somme sera 100.

PROBLEME IV.

36. *Une armée ayant été défaite, le quart est resté sur le champ de bataille, deux cinquiémes ont été faits prisonniers, 14000 hommes qui étoient le reste de l'armée ont pris la fuite. On demande de combien d'hommes l'armée étoit composée avant la bataille.*

Je nomme x le nombre inconnu que je cherche, & je me sers de la lettre a pour marquer les 14000 hommes qui ont pris la fuite; puis je dis : le quart de x, plus les deux cinquiémes de x, plus 14000 sont égaux à l'armée entiere; je réduis donc le problême en équations de la maniere suivante, $\frac{x}{4}+\frac{2x}{5}+a=x$. Comme il n'y a qu'une espece d'inconnue dans cette équation, il est clair que la seconde regle n'a point de lieu, puisqu'il n'y a point de substitution à faire. Il faut donc seulement ôter les fractions, afin d'appliquer ensuite la troisiéme regle.

Je fais évanoüir la premiere fraction en multipliant tous les termes de l'équation par le dénominateur 4, & je trouve l'équation suivante $x+\frac{8x}{5}+4a=4x$, de laquelle j'ôte la fraction $\frac{8x}{5}$, en multipliant tous les termes par le dénominateur 5; il vient $5x+8x+20a=20x$; donc $13x+20a=20x$; donc $20a=20x-13x$, ou $20a=7x$. Or $a=14000$; donc $20a=280000$; ainsi $7x=280000$; & par conséquent en divisant toute l'équation par 7, on aura $x=40000$; c'est-à-dire, que l'armée étoit composée de 40000 hommes.

Pour s'assûrer que ce nombre satisfait aux conditions du Problême, il faut ajoûter les nombres marquez dans le Problême, pour voir si la somme est égale à 40000.

10000	quart de 40000.
16000	deux 5mes de 40000
14000	reste de l'armée.
40000	somme totale.

PROBLEME V.

37. *Trois personnes ont ensemble 150 ans, le premier a le double de l'âge du second; le second a le triple de l'âge du troisiéme. On demande quel est l'âge de chacun en particulier.*

L'âge du troisiéme soit nommé x; celui du second sera $3x$, & celui du premier $6x$, puisqu'il est le double de celui du second; par conséquent on aura l'équation $x+3x+6x=150$, ou bien $10x=150$; ainsi en divisant tout par 10, il viendra $x=15$; c'est-à-dire, que le plus jeune des trois a 15 ans, ainsi le second a 45 ans, & le troisiéme 90. Pour s'assûrer qu'on a bien opéré, il n'y a qu'à ajoûter ces trois âges, & on verra que la somme est égale à 150, & par conséquent on a bien opéré.

38. Si le second avoit eu trois fois l'âge du troisiéme & 5 ans de plus, & que le premier eût eu le double de l'âge du second & 15 années de plus, pour lors l'âge du second auroit été $3x+5$, & l'âge du premier auroit été $6x+10+15$; ainsi au lieu de l'équation $x+3x+6x=150$, on auroit eu $x+3x+5+6x+10+15=150$; donc $10x+30=150$, donc $10x=150-30$, ou $10x=120$; donc $x=12$; c'est-à-dire, que le plus jeune auroit eu 12 ans; ainsi le second en auroit eu 41, & le premier 97. Ces trois nombres font ensemble 150.

39. Ce problême renferme la regle qu'on appelle de *fausse position*, parce que pour trouver la solution des questions qui appartiennent à cette regle, on fait

une ou plusieurs fausses suppositions : par exemple, pour résoudre la question proposée dans ce Problême, on peut supposer que le plus jeune des trois a 10 ans ; par conséquent le second en aura 30 & le premier 60.

Or ces trois nombres ajoûtez ensemble ne font que 100 : d'où il faut conclurre que la supposition que l'on a faite est fausse, puisque les trois âges doivent faire 150. ans. Néanmoins cette supposition, quoique fausse, peut conduire à la vérité par le secours de la regle de trois, en disant, Si 100 donne 10 pour l'âge du plus jeune, combien donneront 150 : voici la proportion renfermée dans cette regle : 100. 10 :: 150. x, ou bien *alternando*, 100. 150 :: 10. x. Il faut donc multiplier les moyens 150 & 10 l'un par l'autre, & diviser le produit 1500 par 100 ; le quotient 15 sera le quatriéme terme de la proportion, & il fera connoître que l'âge du plus jeune est 15 ans.

Mais pour résoudre la question telle qu'elle est proposée dans l'article 38. on fait deux fausses suppositions, par le moyen desquelles on parvient enfin à la vérité : cette méthode est alors assez difficile pour la pratique, & encore plus pour la démonstration.

PROBLEME VI.

40. *Connoissant le premier & le second terme d'une progression géométrique qui va en diminuant, & qui est composée d'une infinité de termes, trouver la somme de tous les termes de la progression.*

Soit par exemple, la progression géométrique $\div\!\div$ 8. 4. 2. 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{16}$, &c. Il s'agit de trouver quelle est la somme de tous les termes de cette progression, que l'on suppose continuée à l'infini.

Pour résoudre ce Problême d'une maniére générale, nous appellerons le premier terme a, le second b, & la somme des termes s. Cela posé, il faut se souvenir d'une proprieté de la progression géométrique qui ser-

vira à la solution du Problême. Cette proprieté est que dans toute progression géométrique la somme des antécédens est à la somme des conséquens comme un seul antécédent est à son conséquent. * Or dans le cas du Problême la somme des antécédens est la même que la somme de tous les termes, puisque tous les termes sont antécédens, excepté le dernier qui est ici zero, à cause que la progression va en diminuant, & qu'elle est supposée avoir une infinité de termes; ainsi la somme des antécédens est $s-o$, ou bien s. D'ailleurs tous les termes d'une progression étant conséquens, excepté le premier, la somme des conséquens sera $s-a$: la proprieté de la progression géométrique pourra donc s'exprimer ainsi, $s.\ s-a :: a.\ b$; donc $bs=as-aa$*, ou $as-aa=bs$; voilà l'équation qui exprime la nature du Problême : mais comme il n'y a qu'une seule inconnue, la seconde regle n'a point ici d'application, il faut donc passer à la troisiéme. *Liv. 2. Art. 84. *Liv. 2. Art. 40.

Je commence par mettre dans le premier membre tous les termes qui contiennent l'inconnue, & les autres termes dans le second membre; je dis donc : puisque $as-aa=bs$, il faut que $as=bs+aa$; donc $as-bs=aa$. Après cela considérant que le premier membre n'est que l'inconnue s multipliée par $a-b$, ou $a-b$ multiplié par s, je divise toute l'équation par $a-b$, afin que s demeure seule dans le premier membre : la division étant faite, je trouve $s=\frac{aa}{a-b}$; c'est-à-dire, que la somme de tous les termes d'une progression géométrique, qui est composée d'une infinité de termes & qui va en diminuant, est égale au quarré du premier terme divisé par le premier moins le second.

Dans l'exemple proposé 8 est le premier terme, son quarré est 64, & le premier terme moins le second est $8-4=4$; ainsi il faut diviser 64 par 4, & le quotient 16 sera la somme de tous les termes de la

progression géométrique proposée, en supposant qu'elle est continuée à l'infini.

41. On peut remarquer que quand les termes de la progression vont en diminuant par moitié, comme dans l'exemple proposé, pour lors la somme de tous les termes qui suivent le premier, est égale à ce premier terme. Cela est évident dans notre exemple : car puisque la somme entiere est 16, & que le premier terme est 8, la somme des autres est aussi 8. Si chaque terme de la progression étoit triple de celui qui suit, comme dans cet exemple $\div\!\!\div$ 12. 4. $\frac{4}{3}$. $\frac{4}{9}$. $\frac{4}{27}$, &c. alors la somme des termes qui suivroient le premier, seroit la moitié de ce premier terme. Si chacun des termes de la progression étoit quadruple du suivant, pour lors la somme des termes après le premier ne seroit que le tiers de ce premier, ainsi de suite : par exemple, si chacun des termes est dix fois plus grand que celui qui suit, comme dans cette progression, $\div\!\!\div$ 10. 1. $\frac{1}{10}$. $\frac{1}{100}$. $\frac{1}{1000}$, &c. la somme de tous les termes moins le premier est la neuviéme partie de ce premier. Tout cela peut se démontrer par la proportion $s.\ s-a :: a.\ b.$ Car à cause de cette proportion on aura *dividendo*, $s-s+a.\ s-a :: a-b.\ b.$ Or. $s-s+a=a$. Donc $a.\ s-a :: a-b.\ b.$ Donc *invertendo*, $s-a.\ a :: b.\ a-b.$ Or dans le dernier exemple, $b=1$ & $a-b=9$; donc $s-a.\ a :: 1.\ 9$: c'est-à-dire, que la somme des termes moins le premier est la neuviéme partie du premier.

PROBLEME VII.

42. *L'aiguille des heures & celle des minutes d'une montre étant toutes les deux au même point de midi, trouver à quel instant l'aiguille des minutes attrapera celle des heures.*

Je remarque d'abord que quand l'aiguille des minutes aura parcouru le cadran entier, celle des heu-

rés se trouvera précisément sur le point qui marque une heure. Ainsi la distance des deux aiguilles sera pour lors l'espace ou l'arc qui est entre les points de midi & d'une heure. J'appelle cet espace a, ainsi cette lettre signifiera la douziéme partie de la circonférence du cadran, soit que ce soit la premiere partie, ou la seconde, ou la troisiéme, &c. Je nomme x l'espace qu'aura parcouru l'aiguille des heures depuis le point d'une heure jusqu'au point où elle sera arrivée quand l'autre l'attrapera. Cela posé, comme l'aiguille des minutes va douze fois plus vîte que la premiere, l'espace qu'elle parcourra en même-tems sera $12x$. Or cet espace que parcourt l'aiguille des minutes jusqu'à ce qu'elle atteigne la premiere, n'est autre chose que l'arc a situé entre les points de midi & d'une heure, plus la distance x qui est depuis le point d'une heure jusqu'au point de rencontre. Par conséquent on aura l'équation, $12x = a + x$. Voilà la nature du Problême exprimée en équation selon ce que demande la premiere regle. Je passe tout d'un coup à la troisiéme, parce qu'il n'y a qu'une espece d'inconnue dans l'équation.

Puisque $12x = a + x$; donc $12x - x = a$, ou $11x = a$; donc en divisant chacun des membres par 11, il viendra $x = \frac{a}{11}$: ainsi l'espace x est la onziéme partie de l'arc a, c'est-à-dire, que l'aiguille des minutes attrapera celle des heures à la onziéme partie de la seconde heure après midi. Et cela est évident, car pour lors l'espace parcouru par cette aiguille des minutes sera 12 fois plus grand que celui que la premiere aura fait dans le même tems, puisqu'elle aura parcouru douze onziémes parties d'a, sçavoir, les onze parties du premier espace désigné par a, & encore une onziéme du second. J'ai dit, les *onze parties du premier espace :* car chaque espace entier contient onze onziémes parties de cet espace.

On peut trouver par la même méthode que s'il y a une aiguille des secondes qui soit sur le point de midi dans le tems que celle des minutes est au point qui marque la fin de la premiere minute après midi, cette aiguille des secondes rencontrera celle des minutes à la cinquante-neuviéme partie de la seconde minute.

43. On pourroit résoudre ce Problême par la remarque qui suit le précédent, sans le secours des équations. Pour cela il faut faire attention que tandis que l'aiguille des minutes parcourra l'espace *a* qui est entre les points de midi & d'une heure, l'aiguille des heures, que j'appelle la premiere, fera la douziéme partie de l'espace depuis une heure jusqu'à deux, puisque la seconde va 12 fois plus vîte que la premiere : cette douziéme partie soit appellée *b*. De même pendant le tems que l'aiguille des minutes parcourra *b*, celle des heures fera un autre espace *c*, qui sera la douziéme partie de *b*, & tandis que la seconde aiguille parcourra *c*, la premiere fera encore l'espace *d*, qui sera la douziéme partie de *c*, ainsi de suite à l'infini. Par conséquent tout l'espace qu'aura fait l'aiguille des heures quand celle des minutes l'atteindra, sera une suite infinie de petits espaces, dont chacun sera la douziéme partie du précédent. Or l'arc *a* compris entre les points de midi & d'une heure est le premier terme de la progression dont cette suite infinie renferme les autres termes. Par conséquent l'espace parcouru par l'aiguille des heures n'est que la onziéme partie d'un arc égal au premier marqué par *a*. Ainsi l'aiguille des minutes attrapera l'autre à la onziéme partie de la seconde heure.

PROBLEME IX.

45. *Une personne ayant rencontré des pauvres, a voulu donner à chacun quatre sols; mais elle a trouvé en comptant son argent, qu'elle avoit deux sols de moins qu'il ne falloit; c'est pourquoi elle a donné trois sols seulement à chaque pauvre,*

pauvre, & il y en est resté cinq. On demande combien la personne avoit de sols, & combien il y avoit de pauvres.

J'appelle x le nombre des pauvres, & y celui des sols; & je dis: Puisque, si cette personne avoit eu deux sols de plus qu'elle n'avoit, elle en auroit eu assez pour donner quatre sols à chacun des pauvres; il s'ensuit qu'en ajoûtant 2 à y, la somme $y+2$ sera quatre fois plus grande que x, qui est le nombre des pauvres; par conséquent $y+2=4x$.

D'ailleurs par la seconde condition du Problême, cette personne ayant donné trois sols à chaque pauvre, il en est resté cinq; par conséquent en retranchant 5 de y, le reste $y-5$ sera trois fois plus grand que x; ainsi $y-5=3x$. Les deux équations du Problême sont donc $y+2=4x$ & $y-5=3x$. Voilà l'application de la premiere regle, & voici celle de la seconde.

Puisque $y+2=4x$; donc $y=4x-2$: je substitue dans la seconde équation du Problême la valeur de y, sçavoir $4x-2$; & je trouve $4x-2-5=3x$, ou $4x-7=3x$. Après cela j'applique tout de suite la troisiéme regle: puisque $4x-7=3x$; donc $4x=3x+7$; donc $4x-3x=7$; donc $x=7$; c'est-à-dire, qu'il y avoit sept pauvres.

Que si on veut pratiquer la seconde regle par la soustraction, il faut retrancher l'équation $y-5=3x$ de l'autre $y+2=4x$, le reste est $y+2-y+5=4x-3x$, qui se réduit à $2+5=x$, ou $x=7$.

Pour connoître le nombre de sols, je mets 7 à la place de x dans la premiere équation, & je trouve $y+2=28$; donc $y=28-2$, ou bien $y=26$: ainsi la personne avoit 26 sols: & d'ailleurs il y avoit sept pauvres. Il est aisé de voir que ces deux nombres satisfont aux deux conditions du Problême.

On auroit pû rendre générale la solution de ce Problême en mettant à la place des deux chiffres 2 & 5,

les deux lettres m & n ou quelques autres, & pour lors au lieu des deux premieres équations $y+2=4x$, & $y-5=3x$, on auroit eu celles-ci $y+m=4x$ & $y-n=3x$. Après quoi on feroit parvenu à l'équation $x=m+n$ de la même maniere qu'on a trouvé $x=7$. Or cette équation $x=m+n$ montre que le nombre des pauvres est égal à $m+n$, c'est-à-dire, au nombre des sols qui manquoient pour en donner 4 à chaque pauvre, plus à celui des sols qui sont restés en donnant seulement 3 sols. D'où l'on pourra connoître tout d'un coup que dans tous les Problêmes semblables le nombre des pauvres est toujours égal à celui des sols qui manquoient d'abord, & à celui des sols qui sont restés. Par exemple, s'il avoit manqué 6 sols pour en donner 8 à chaque pauvre, & qu'il en eût resté 4, en donnant 7 sols, le nombre des pauvres auroit été $6+4$, c'est-à-dire 10. Or quand on connoît le nombre des pauvres, il est facile de trouver celui des sols. Ainsi dans ce dernier exemple la personne avoit 74 sols, puisque si elle avoit eu 6 sols de plus qu'elle n'avoit, elle auroit pû donner 8 sols à chacun des dix pauvres; & par conséquent elle auroit eu dix fois huit sols, c'est-à-dire, 80.

On pourra voir dans l'Ouvrage dont celui-ci est l'abrégé, des éxemples plus difficiles des équations du premier degré, & d'autres dont la solution dépend de celles du second.

FIN.